Formelsammlung Wahrscheinlichkeit
Manfred Jäger-Ambrozewicz, www.mathfred.de

Ziehungen

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Reihenfolge relevant	n^k	$(n)_k$
Reihenfolge irrelevant	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

Belegungen (Behälter unterscheidbar)

	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbeleg.
unterscheidbare Kugeln	n^k	$(n)_k$
nicht-unterscheidbare Kugeln	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

n Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1) \tag{1}$$

Multinomialkoeffizient

$$\binom{n}{n_1, ..., n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} \tag{2}$$

fallende Faktorielle

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .. \cdot (n-k+1) \tag{3}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5}$$

Multimengenkoeffizient

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) := \binom{n+k-1}{k} \tag{6}$$

σ-Algebra $\Omega \neq \emptyset$

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{7}$$
$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \tag{8}$$
$$A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \tag{9}$$

Wahrscheinlichkeitmaß $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \tag{10}$$
$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \tag{11}$$

Regel für $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \tag{12}$$
$$\mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \tag{13}$$
$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \tag{14}$$
$$A \subset B, \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \tag{15}$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \tag{16}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{17}$$

Unabhängigkeit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{18}$$

... für alle endlichen $J \subset I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \tag{19}$$

Multiplikationsformel

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)\\ =&\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})\cdot\\ &\mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cap ... \cap A_{n-2})\cdot\\ &\cdot ...\\ &\cdot \mathbb{P}(A_2|A_1)...\\ &\cdot \mathbb{P}(A_1)\end{aligned} \tag{20}$$

Fallunterscheidungsformel (n Fälle), Cocktailformel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\ ... + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)\end{aligned} \tag{21}$$

Fallunterscheidungsformel (2 Fälle), Cocktailformel

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c). \tag{22}$$

Bayes (n Fälle)

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + .. + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)} \tag{23}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} \tag{24}$$

Bayes (A und A^c)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \tag{25}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \tag{26}$$

Mehrstufige Experimente

$$\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n, \tag{27}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_2(\omega_2|\omega_1) \cdot .. \cdot \mathbb{P}_n(\omega_n|\omega_1, .., \omega_{n-1}) \tag{28}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in A} \mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}). \tag{29}$$

Prinzip von Inklusion und Exklusion

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1,...,n} A_i\right) = \sum \mathbb{P}(A_i)\\ - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\\ + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...\\ +(-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)\end{aligned} \tag{30}$$

Limsup A_i

$$\begin{aligned}\limsup A_i :=& \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\\ =& \{\omega| \text{ für } \infty\text{-viele } i \text{ gilt } \omega \in A_i\}\\ =& \text{„}\infty\text{-viele der Ergeb. } A_i \text{ treten ein“}\end{aligned}$$

Liminf A_i

$$\liminf A_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$= \{\omega|$ für alle bis auf endl. viele $i : \omega \in A_i\}$

$=$ „alle bis auf endl. viele der Ergeb. A_i treten ein“

Borel-Cantelli

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\{A_i \text{ unendl. oft}\} = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty \wedge A_i \text{ paarweise unabh.}\\ \Rightarrow \mathbb{P}\{A_i \text{ unendl. oft}\} = 1\end{aligned} \tag{32}$$

Zähldichte $p_j \geq 0, j \in \Omega$ (abzählbar viele)

$$\sum_{j \in \Omega} p_j = 1 \tag{33}$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j \in B} p_j \tag{34}$$

Laplace

$\Omega \neq \emptyset, \#(\Omega) = n, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\#(A)}{n} \tag{35}$$

$$= \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \tag{36}$$

Bernoulli

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \tag{37}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \tag{38}$$

$$\mathbb{E}(X) = p \tag{39}$$

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p) \tag{40}$$

Binomial

$\Omega = \{0, 1, 2, ...n\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{41}$$

$$\mathbb{E}(X) = np \tag{42}$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) \tag{43}$$

Multinomial

$\Omega = \{(n_1, n_2, ..., n_K) \in \mathbb{N}_0^K \mid \sum_{j=1}^K n_j = n\}$, $p_i \in (0,1), i = 1, .., K, \sum_{i=1}^K p_i = 1$

$$p((n_1, ..., n_K)) = \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_K} p_1^{n_1} \cdot ... \cdot p_K^{n_K} \tag{44}$$

Hypergeometrische Verteilung

$N, M, n \in \mathbb{N}$ mit $M \leq N$, $n \leq N$,
$\Omega = \{0, 1, ..., n\}$

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{45}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{Mn}{N} \tag{46}$$

Geometrische Verteilung

$\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$

$$p_k = (1-p)^k p \tag{47}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} \tag{48}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} \tag{49}$$

Negative Binomial Verteilung / Pascal Verteilung

$$p_k = \binom{n+k-1}{k} (1-p)^k p^n \tag{50}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(1-p)}{p} \tag{51}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(1-p)}{p^2} \tag{52}$$

Poisson Verteilung

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \tag{53}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \tag{54}$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda \tag{55}$$

Diskrete Zufallsvariable

- $\text{Bild}(X)$ ist abzählbar.
- $A \subset \text{Bild}(X)$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.
- **Verteilung** von X

$$\mathbb{P}^X : \begin{cases} \mathcal{P}(\text{Bild}(X)) \to [0,1] \\ A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

- $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ die Wahrscheinlichkeit das X einen Wert in der Menge A annimmt.

Erwartungswert (diskret)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Bild}(X)} p(x) \cdot x, \tag{56}$$

... ist monoton und linear (siehe unten)

Varianz

$$\mathbb{V}(X) := \sigma_X^2 := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \tag{57}$$

Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \tag{58}$$

Verschiebungssatz

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \tag{59}$$

Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f \geq 0 \tag{60}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{61}$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz, x \in \mathbb{R} \tag{62}$$

Regeln für Wahrscheinlichkeiten mit Dichten $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$\mathbb{P}(\{a\}) = 0 \tag{63}$$

$$\mathbb{P}((-\infty, a]) = \mathbb{P}((-\infty, a)) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{64}$$

$$\mathbb{P}((a, \infty)) = \mathbb{P}([a, \infty)) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx \tag{65}$$

$$\mathbb{P}((a,b)) = \mathbb{P}((a,b]) = \mathbb{P}([a,b)) \tag{66}$$

$$= \mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)dx \tag{67}$$

Verteilung von X

$$\mathbb{P}^X = \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1] \\ B \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B)) =: \mathbb{P}(X \in B) \end{cases} \quad (68)$$

Verteilungsfunktion

$$F = \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases} \quad (69)$$

Erwartungswert (mit Dichte) $X \sim f$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (70)$$

... ist monoton und linear (siehe unten)

Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ falls } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (71)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad (72)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (73)$$

Gauß-Verteilung / Normalverteilung

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ und

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (74)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad (75)$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2 \quad (76)$$

Log-Normalverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\phi_{\mu,\sigma}(\ln(x)) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (77)$$

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (78)$$

$$\mathbb{V}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \quad (79)$$

$$\log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (80)$$

Exponentialverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (81)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (82)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (83)$$

Gamma-Verteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (84)$$

$\lambda-$Quantil von X

$$F(q) = \mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda \textbf{ und} \quad (85)$$

$$G(q) = F(q-) = \mathbb{P}(X < q) \leq \lambda. \quad (86)$$

obere Quantilsfunktion

$$q^+(\lambda) = \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) > \lambda\} \quad (87)$$

$$= \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) \leq \lambda\} \quad (88)$$

untere Quantilsfunktion

$$q^-(\lambda) = \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) < \lambda\} \quad (89)$$

$$= \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\} \quad (90)$$

Einfache Funktionen

$$X(\omega) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega) \quad (91)$$

Einfache Funktionen – Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{P}(A_i) \quad (92)$$

Erwartungswert – nicht-negative Funktionen

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) | \, 0 \leq Y \leq X, Y \text{ einf.}\} \quad (93)$$

Erwartungswert

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad (94)$$

$$= \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad (95)$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_E h(X) d\mathbb{P}^X \quad (96)$$

$$= \int_\mathbb{R} h(x) dF^X \quad (97)$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R} \, d\mathbb{P}^X \quad (98)$$

$$= \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R}(x) \, d\mathbb{P}^X(x) \quad (99)$$

$$= \int_\mathbb{R} x \, d\mathbb{P}^X = \int_\mathbb{R} x \, dF^X. \quad (100)$$

Erwartungswert linear

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \tag{101}$$

Erwartungswert monoton

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) \tag{102}$$

Dreiecksungleichungen

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|) \tag{103}$$

Varianz

$$\sigma_X^2 := \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \tag{104}$$

Varianz – Verschiebungssatz

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \tag{105}$$

Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \tag{106}$$

Varianz

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) \tag{107}$$

Varianz (wenn unkorreliert)

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) \tag{108}$$

Ungleichungen (Tschebyscheff, Markov)

$$\mathbb{P}(h(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{a} \tag{109}$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} \tag{110}$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2} \tag{111}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2} \tag{112}$$

Gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}^{(X,Y)}(B) = \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,1] \\ B \mapsto \mathbb{P}((X,Y) \in B) \end{cases} \tag{113}$$

Gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F^{(X,Y)} = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to [0,1] \\ (x,y) \mapsto \mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) \\ = \mathbb{P}^{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) \end{cases} \tag{114}$$

Gemeinsame Dichte und Randdichte

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{für } a,b \in \mathbb{R} \tag{115}$$

$$F(\infty,\infty) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \tag{116}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \tag{117}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \tag{118}$$

Kovarianz

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] \tag{119}$$

$$= \mathbb{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \tag{120}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{121}$$

Korrelation

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{std}(X)\cdot\operatorname{std}(Y)} \tag{122}$$

Kovarianz

$$\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\cdot\operatorname{cov}(X,Y) \tag{123}$$

Kovarianz

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y) \tag{124}$$

$$\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y) \tag{125}$$

Varianz-Kovarianz Matrix

$$(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})_{i,j} = \operatorname{cov}(X_i, X_j) \tag{126}$$

$$\sigma_X^2 = (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})_{i,i} \tag{127}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ symmetrisch und positiv definit; $x^T\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}x \geq 0$

Sandwichformel Kovarianz für lineare Transformation Kovarianz

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{AX+b}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T. \tag{128}$$

Ungleichungen Momente (Cauchy-Bunjakowski-Schwarz)

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \tag{129}$$

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} \tag{130}$$

$$|\mathrm{cov}(X,Y))| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} \tag{131}$$
$$(\mathrm{cov}(X,Y))^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \tag{132}$$

Ungleichung von Jensen (g konkav)

$$\mathbb{E}(g(X)) \leq g(\mathbb{E}(X)) \tag{133}$$

Regression

$$b = \frac{\mathrm{cov}(Y,X)}{\mathbb{V}(X)} \tag{134}$$

Konvergenz

i.) $(X_i) \to X$ **fast sicher** $:\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_i \to X) = 1$. In diesem Fall schreiben wir

$$\text{f.s.-}\lim X_i = X. \tag{135}$$

ii.) Es sei $p = 1$ oder $p = 2$. $(X_i) \to X$ **im p-ten Mittel** $:\Leftrightarrow X_i \in \mathcal{L}^p, i \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}(|X_i - X|^p) \to 0$ für $i \to \infty$. In diesem Fall schreibt man

$$\mathcal{L}^p\text{-}\lim X_i = X. \tag{136}$$

iii.) $(X_i) \to X$ **nach Wahrscheinlichkeit** $:\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: für $i \to \infty$ gilt $\mathbb{P}(|X_i - X| > \varepsilon) \to 0$. In diesem Fall schreibt man

$$\text{n.W.-}\lim X_i = X. \tag{137}$$

iv.) $(X_i) \to X$ **in Verteilung** $:\Leftrightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ in denen F^X stetig ist gilt $F^{X_i}(x) \to F^X(x)$. In diesem Fall schreiben wir

$$\text{i.V.-}\lim X_i = X. \tag{138}$$

ε-Abweichungsmengen A_n und B_n

$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\} \tag{139}$$
$$B_n(\varepsilon) = \left\{\bigcup_{m\geq n} A_m(\varepsilon)\right\} \tag{140}$$

f.s.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \to 0, n \to \infty \tag{141}$$

f.s.-Konvergenz $\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty \tag{142}$$

f.s.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \varepsilon) = 0 \tag{143}$$

n.W.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \tag{144}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) \to 0, n \to \infty \tag{145}$$

Empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(X_i(\omega)) \tag{146}$$

Gliwenko-Cantelli

$$\text{f.s.-}\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x,\omega) - F(x)| = 0 \tag{147}$$

GgZ
schwaches

$$\text{n.W.-}\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \tag{148}$$

starkes

$$\text{f.s.-}\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \tag{149}$$

ZgS

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{150}$$
$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathrm{std}(S_n)} \tag{151}$$

$$\text{i.V.-}\lim S_n^* = Z,\ Z \sim \mathrm{N}(0,1), \tag{152}$$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \tag{153}$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - k\sigma/\sqrt{n} \geq \mu \geq \bar{X}_n + k\sigma/\sqrt{n}\right) \tag{154}$$
$$\dot{\sim} 2\Phi(k) - 1 \tag{155}$$

Halbring

$$\emptyset \in \mathcal{H} \tag{156}$$
$$A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H} \tag{157}$$
$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \setminus B = ... \\ = C_1 \cup ... \cup C_m, C_k \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{158}$$

μ **Inhalt** auf HR $\mathcal{H}$: für alle $A_i \in \mathcal{H}, i = 1, ..., n$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{H}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \tag{159}$$

gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{160}$$

$\mathcal{Z} = \{Z_j | j \in K\}$ eine **Zerlegung**

$$\sigma(\mathcal{Z}) = \left\{ \bigcup_{k \in J, J \subset K} Z_k \mid J \subset K \right\}.$$

$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ **messbar**

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \;\; \forall B \in \mathcal{B} \tag{161}$$

f mit **endlichen Bild** $f(\Omega) = \{c_1, ..., c_n\}$

$$Z_i = f^{-1}(\{c_i\}) \tag{162}$$
$$\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\} \tag{163}$$
$$\sigma(f) = \sigma(\mathcal{Z}) \tag{164}$$

f ist genau dann $\sigma(\mathcal{Z})$-messbar, wenn f auf den Mengen Z_k konstant ist

Bedingte Erwartung bezügl. $\mathcal{F}$

$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}$-messbar und

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_F Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F X) \; \forall F \in \mathcal{F}. \tag{165}$$

Bedingte Erwartung bezügl. $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}) = \alpha\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \beta\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \\ &X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Bedingte Erwartung mit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z})$ (Zerlegung)

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Z_i} X)}{\mathbb{P}(Z_i)} \text{ für } \omega \in Z_i \tag{166}$$

und wenn zudem X **diskret**

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) = \sum_{x \in \mathrm{Bild}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x \mid Z_i), \omega \in Z_i \tag{167}$$

Bedingte Erwartung bezügl. $\mathcal{F}$

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \arg\min_{Z} \{\mathbb{E}(X - Z)^2 | Z \in \mathcal{L}^2, Z \; \mathcal{F}\text{-messbar}\} \tag{168}$$

Bedingte Erwartung

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1] \tag{169}$$

Bedingte Erwartungen (Y $\mathcal{F}$-messbar)

$$\mathbb{E}(YX|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \tag{170}$$

$\sigma(X)$ und $\mathcal{F}$ **unabhängig**

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X) \tag{171}$$

$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ **vollständige Information**

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X \tag{172}$$

Ohne Information

$$\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X) \tag{173}$$

Bedingte Erwartungswert bezügl. Y

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) := \mathbb{E}(X|\sigma(Y))(\omega) \tag{174}$$
$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = h(Y(\omega)) \tag{175}$$
$$\mathbb{E}(X|Y = x) = h(x) \tag{176}$$
$$\mathbb{E}(X|Y = Y(\omega)) = \mathbb{E}(X|Y)(\omega) \tag{177}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit bezügl. $\mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A|\mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}$ messbar und

$$\int_F \mathbb{P}(A|\mathcal{F}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap F) \; \forall F \in \mathcal{F} \tag{178}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei Zerlegung $\mathcal{Z}$

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F})(\omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap Z_i)}{\mathbb{P}(Z_i)}, \; \omega \in Z_i \tag{179}$$

Bedingte Zähldichte für $\mathcal{F} = \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}|\mathcal{F})(\tilde{\omega}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{\omega\}|B), \omega, \tilde{\omega} \in B \\ \mathbb{P}(\{\omega\}|B^c), \omega, \tilde{\omega} \in B^c \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{180}$$

Bedingte Erwartungen und bedingte Erwartungen

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\{B\}))(\tilde{\omega}) = \int X(\omega)\mathbb{P}(d\omega|\sigma(\{B\}))(\tilde{\omega})$$

Bedingter Erwartungswert bei Dichten

$$f_{X|Z}(x|Z=z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(x)} \text{ falls } f_Z(x) \neq 0 \tag{181}$$

$$= 0 \text{ sonst} \tag{182}$$

$$\mathbb{E}(h(X)|Z=z)(\omega) = \int h(x) f_{X|Z}(x|Z=z)dx \tag{183}$$

$$g(z) = \int h(x) f_{X|Z}(x|Z=z)dx \tag{184}$$

$$g(Z(\omega)) = \mathbb{E}(h(X)|\sigma(Z))(\omega) \tag{185}$$

Charakteristische Funktion

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}^X(x) \tag{186}$$

$$\Psi_{-X}(t) = \overline{\Psi_X(t)} \tag{187}$$

$$\Psi_{a+bX}(t) = e^{iat}\Psi_X(bt) \tag{188}$$

Verteilung von Summen von unabh. ZV

$$\Psi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \Psi_{X_j}(t) \tag{189}$$

Inversion

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \Psi_X(t)dt = \frac{1}{2}\mathbb{P}^X(\{a\}) + \mathbb{P}((a,b)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}^X(\{b\}) \tag{190}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\Psi_X(t)dt \tag{191}$$

Transformation $Y = g(X)$, $m = 1$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| \tag{192}$$

Transformation $Y = g(X)$, $m = 2$, $I = I_1 \cup I_2$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{g(I_1)}(y) f_X(h_1(y)) \, |h_1'(y)| \tag{193}$$

$$+ \mathbb{1}_{g(I_2)}(y) f_X(h_2(y)) \, |h_2'(y)| \tag{194}$$

Transformation $Y = aX + b$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \tag{195}$$

Fehler gefunden? Ich bin für Hinweise sehr dankbar: jaegera ät htw-berlin punkt de