Finanzmathematik

Manfred Jäger-Ambrożewicz
www.mathfred.de
www.mathstat.de
18. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Ergebnisse im Basismodell

Agenda: Entwickelt wird ein Rahmen für die **relative** Wertpapierbewertung. Wir betrachten arbitragefreie (Modell-)Finanzmärkte und entwickeln insbesondere das Risikoneutralbewertungsprinzip und die beiden Hauptsätze der Wertpapierbewertung.

Was soll man sich vorstellen? Wir stellen uns eine Finanzmathematikerin vor, die auf rationaler Basis eine ihr vorgelegtes Finanzprodukt bewerten will. Die Preise anderer Finanzprodukte kann die Finanzmathematikerin beobachten. Mit Blick auf die anderen Finanzpreise, welcher Preis ist rational für das vorgelegte Finanzprodukt.

Ein Finanzmathematiker ist Spezialist für ein Wertpapier. Er fragt sich, ob der Preises seines Wertpiers mit den Preisen anderer Wertpapiere konsistent ist oder ob eine Fehlbewertung vorliegt ......

1.1 Definitionen

1.1.1 Definition/Spezifikation: Das **Ein-Perioden-Finanzmarktmodell (EPFMM)** ist durch die folgenden Angaben definiert (spezifiziert):

- Es gibt zwei **Zeitpunkte** $\mathbb{T} = \{t_0, t_1\}$.

  In $t = t_0$ kauft der Anleger Wertpapiere und legt Geld am Geldmarkt an (der Anleger hat Ausgaben). In $t = t_1$ ergeben sich die Auszahlungen/Endwerte der Wertpapieren an den Anleger.

  Für die Entwicklung des Modells sind die konkreten Zeitpunkte von t_0 und t_1 irrelevant. Deshalb *normieren* wir den Zeitstrahl $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$. Wir fassen $t_0 = 0$ als *Entscheidungszeitpunkt* auf. In $t = t_1$ realisiert sich das Ergebnis des Zufallsexperiments und die damit die Endwerte der Anlageformen.

- Es sei $K \in \mathbb{N}$. Es gibt K **Zustände** $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit $p_k := \mathbb{P}(\omega_k) := \mathbb{P}(\{\omega_k\}) > 0$ für $k = 1, ..., K$.

  Wir stellen uns vor, dass in $t = 1$ einer der K Zustände mit Wahrscheinlichkeit p_k eintritt.

  Ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf einem endlichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist bekanntlich durch die Angabe der Zähldichte $p_k \in (0, 1), k = 1, ..., K$

definiert. Die Wahrscheinlichkeiten aller anderen Ereignisse ergeben gemäß

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\,:\,\omega_k \in A} p_k, \quad A \subset \Omega.$$

Am Rande: In der Wahrscheinlichkeitstheorie muss nicht unbedingt jede Wahrscheinlichkeit p_k strickt größer Null sein.

- Anleger haben Zugang zum **Geldmarkt**. Wenn ein Anleger in $t = 0$ eine Geldeinheit (GE) auf das Geldmarktkonto einzahlt, dann erhält er in $t = 1$ die Auszahlung $R > 0$. Mit $r = R - 1 > -1$ bezeichnen wir den **Geldmarktzinssatz**.

  Wir setzen nicht voraus, dass Zinsen nicht-negativ sind. Wir benötigen lediglich $r > -1$, denn wir werden regelmäßig beim diskontieren durch $1 + r$ dividieren. Wir setzen also stets $r > -1$ bzw. $R > 0$ voraus.

- Anleger können zum Zeitpunkt $t = 0$ in $N \in \mathbb{N}$ Wertpapiere investieren; diese Wertpapiere nennen wir **Basiswertpapiere**.[1] Die Preise der Wertpapiere

[1] Zusammen mit dem Geldmarkt bilden die Wertpapier die Basisanlagemöglichkeiten des Modells.

in $t = 0$ fassen wir in einem Vektor

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

zusammen. Die Wertpapierpreise in $t = 1$ sind Zufallsvariablen mit Realisierungen $S_1^j(\omega_k) \in \mathbb{R}, k = 1, ..., K, j = 1, ..., N$.

Wir können die Realisierungen der Wertpapierpreise in einer Matrix zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} S_1^1(\omega_1) & ... & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) \\ S_1^1(\omega_2) & ... & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_1^1(\omega_K) & ... & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(K, N; \mathbb{R})$$

► Vorgegeben (exogen) werden also die folgenden Werte: r, S_0^j, $S_1^j(\omega_k)$ sowie die Wahrscheinlichkeiten p_k; diese Werte sind **exogen**.

Abbildung 1.1.1: Das Schema zeigt die **Zeitschiene des EPFMMs**

1.1.2 Beispiel: Ein sehr kleines EPFMM wird durch die folgende Spezifikation definiert. Es sei $r = \frac{1}{9} = 0.11$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Wenn der Anleger 5 GE auf das Geldmarktkonto einzahlt, dann ergibt sich in $t = 1$ eine sichere Zahlung von $\frac{50}{9} = 5\left(1 + \frac{1}{9}\right)$; der Bruttozins ist demnach $R = \frac{10}{9}$. Wenn der Anleger für 5 GE das Wertpapier kauft, dann ergibt sich eine unsichere Auszahlung. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 beträgt die Auszahlung $\frac{60}{9}$ und mit Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Auszahlung $\frac{40}{9}$. Die erwartete Auszahlung ist $\mathbb{E}(S_1) = \frac{3}{4}\frac{60}{9} + \frac{1}{4}\frac{40}{9} = \frac{55}{9}$. In beiden Anlagevarianten setzt der Investor 5 GE. Bei der Anlage am Geldmarktkonto ergibt sich eine sichere Zahlung von $\frac{50}{9}$. Wenn er das Wertpapier kauft, dann ist Auszahlung eine *Lotterie* mit Erwartungswert $\frac{55}{9}$.

Auch als Dezimalzahl mit Komma ....

*Aus*zahlung oder besser Zahlung an ....

Bei der Anlage am Geldmarkt ist die Rendite $\frac{1}{9}$. Bei der Anlage in das WP1 ist die Rendite $\frac{\frac{60}{9} - \frac{45}{9}}{\frac{45}{9}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ oder $\frac{\frac{40}{9} - \frac{45}{9}}{\frac{45}{9}} = \frac{-5}{45} = -\frac{1}{9}$. Die erwartete Rendite für den Geldmarkt ist (natürlich) $\frac{1}{9}$. Für das WP1 ist die erwartete Rendite $\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{-1}{9} = \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36}$ und es ist $\frac{8}{36} > \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Die Anlage in das Wertpapier ist zwar riskant hat aber dafür eine höhere erwartete Rendite. Der Anleger wird sozusagen für die Übernahme des Risikos kompensiert. Man nennt die Differenz $\frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{4}{36}$ **Risikoprämie**.

1.1.3 Bemerkung: i.) Wir verwenden für Wertpapierpreise $S_t^j(\omega_k)$ die folgenden **Konventionen**. Der Subindex t von $S_t^j(\omega_k)$ gibt den Zeitpunkt an. Der Superindex j von

$S_t^j(\omega_k)$ gibt die Wertpapiernummer an. Das Argument ω_k von $S_t^j(\omega_k)$ gibt den Zustand an.

ii.) Eine Zufallsvariable $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit einen endlichen Definitionsbereich $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ werden wir mit dem Vektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(\omega_K) \end{pmatrix}$$

identifizieren. Wir werden also wahlweise von der **Zufallsvariable** $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, vom **Vektor** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ oder vom **Zahlungsprofil** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ sprechen. Missverständnisse können bei genauer Betrachtung nicht entstehen.

Wir können je nach Perspektive – Vektoren bzw. Zufallsvariablen – Resultate der Linearen Algebra bzw. der Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden.

iii.) Wir haben die Anlageform mit Auszahlung R als Geldmarktkonto interpretiert; R ist dann die **Bruttoverzinsung** (also einschließlich der Rückzahlung in $t = 1$ des in $t = 0$ eingezahlten Betrags). Alternativ kann man **Geldmarktanteile** betrachten, deren Preis im Betrachtungszeitpunkt auf $R_0 = 1$ normiert ist, d.h. die im Betrachtungszeit pari emittiert werden. Die garantierte Auszahlung in $t = 1$ ist $R_1 = R$. In diesem Fall ist der Preis bzw. die Auszahlung $R_1 = R$ in $t = 0$ bekannt. Geldmarktanteile haben also einen Preis der sich in Mehrperiodenmodellen ändern kann, aber diese Änderung ist anders als bei den riskanten Wertpapieren schon vorab bekannt.

noch ausführlicher ....

Wir haben die Anlageform Geldmarkt aus zwei Gründen *extra* modelliert: (1) Diese Anlageform stellt **die risikolose Anlageform** dar (risikolos ist die Anlageform jedenfalls für eine Periode). (2) Diese Anlageform dient typischerweise als **Standard-Numeriare**; was das bedeutet werden wir später erläutern.

Numeriare ... Geld ... Auszahlung in Geldeinheiten ...

1.1.4 Definition: Eine **Handelsposition** (Handelsstrategie, Portfolio) wird durch einen Vektor $\mathbf{h} = (h_0, h_1, ..., h_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ repräsentiert. Dabei bezeichnet h_0 den am Geldmarkt investierten/geliehenen Betrag **in Geldeinheiten** und $h_j, j = 1, ..., N$ die Anzahl der **Stücke** des Wertpapiers mit der Wertpapiernummer j. Wir werden die für uns im folgenden selbstverständliche Angabe $\in \mathbb{R}^{N+1}$ oft weglassen, d.h. wenn nichts anderes angeben ist, dann ist ein $\mathbf{h}$ ein Vektor des $\mathbb{R}^{N+1}$, der eine Handelsposition repräsentiert.

Wir reservieren $\mathbf{h}$ für Handelspositionen.

Wenn wir **Geldmarktanteile** betrachten, dann entspricht h_0 dem **Bestand** der Geldmarktanteile, die in der **Einheit** Stücke gemessen werden.

1.1.5 Bemerkung: i.) Es sei $\mathbf{h}$ eine Handelsposition und $j \in \{1, 2, ..., N\}$. Da wir $h_j \in \mathbb{R}$ zulassen, lassen wir insbesondere auch $h_j < 0$ zu; das sind sogenannte **Leerverkäufe**.

Dieser Text ist nicht der richtige Ort, um die teilweise komplexen institutionellen Details von Leerverkäufen zu erläutern. Nützlich ist aber die folgende Skizze: Wenn man Wertpapiere, die man nicht besitzt, verkaufen will, dann borgt man sich diese. Die Leihe wird von einem Vermittler organisiert. Man verkauft dann die geborgten Wertpapiere am Wertpapiermarkt. Am Ende der Leihfrist kauft man die Wertpapiere am Wertpapiermarkt und gibt sie zurück. Der Besitzer, dessen Wertpapiere geborgt und verkauft werden, bemerkt diesen Vorgang nicht. Während der Leihfrist anfallende Dividenden bzw. Coupons muss der Leerverkäufer an den Inhaber des geliehen Wertpapier zahlen.

..... insb Quelle zu den inst Details

Broker ....?

ii.) Wir behandeln die Fälle $h_0 < 0$ (man leiht sich Geld) und $h_0 > 0$ (man verleiht Geld) nicht separat als zwei Fälle mit unterschiedlichen Zinsen, sondern *einheitlich* $h_0 \in \mathbb{R}$. Die Verzinsung für eine Anlage am Geldmarkt und für die Kreditaufnahme auf dem Geldmarkt sind also gemäß Annahme gleich.

iii.) Die Annahme $h_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$ bedeutet, dass wir die **beliebige Teilbarkeit** der Wertpapiere unterstellen. Für die *mathematische* Analyse ist diese Annahme wichtig. Insbesondere können wir Methoden und Ergebnisse der Linearen Algebra des $\mathbb{R}^n$ anwenden.

iv.) Die Wertpapierpreise S_t^j und der Zins r sind **exogen**. Das bedeutet insbesondere: Selbst wenn sich Investoren für ein sehr „großes" $\mathbf{h}$ (sehr große Nachfrage bzw. Angebot) entscheiden, ändern sich die Preise bzw. der Zins nicht.

Preisnehmer .... Ein Anleger müsste seine Nachfrage dosieren ....

1.1.6 Definition: Wir definieren die **Auszahlungsmatrix** (für alle Anlagealternativen und alle Zustände) des EPFMM als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) \\ R & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R & S_1^1(\omega_K) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(K, 1+N; \mathbb{R}).$$

Kann man oBdA unterstellten, dass die Spalten von **A** linear unabhängig sind?

Konventionen: bei einer $M(K, 1+N; \mathbb{R})$ Matrix gibt es eine Spalte 0. ......

In einer Spalte

$$\begin{pmatrix} S_1^j(\omega_1) \\ \vdots \\ S_1^j(\omega_K) \end{pmatrix}$$

stehen also die Auszahlungen einer Anlageform und in einer Zeile

$$\begin{pmatrix} R & S_1^1(\omega_k) & \dots & S_1^N(\omega_k) \end{pmatrix}$$

stehen die Auszahlungen der $N+1$ Anlageformen im Zustand ω_k. Die **Auszahlung bzw. den Endwert** in $t = 1$ des Portfolios **h** definieren[2] wir als

$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h}.$$

[2] Warum ist das eine Definition und keine Schlussfolgerung? Diskutieren Sie! Denken Sie insbesondere an Menüs in Restaurants.

Ausgeschrieben haben wir also:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) &= Rh_0 + S_1^1(\omega_1)h_1 + ... + S_1^N(\omega_1)h_N \\
\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) &= Rh_0 + S_1^1(\omega_2)h_1 + ... + S_1^N(\omega_2)h_N \\
... &\quad ... \\
\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_K) &= Rh_0 + S_1^1(\omega_K)h_1 + ... + S_1^N(\omega_K)h_N.
\end{aligned}$$

Wir beachten, dass $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}$ je nach Perspektive eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. ein Vektor in $\mathbb{R}^K$ ist. Wenn wir $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}$ als Zufallsvariable auffassen, dann schreiben wir

$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} = h_0R + h_1S_1^1 + ... + h_NS_1^N \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega) = h_0R + h_1S_1^1(\omega) + ... + h_NS_1^N(\omega).$$

anstatt des Matrixprodukts $\mathbf{Ah}$.

Diese Definitionen bedeuten, dass wir *lineare Preise* unterstellen. Es gibt also **keine *Rabatt für Menüs***.

Ferner definiert (beachte $R_0 = 1$)

$$
\begin{aligned}
V_0^{\mathbf{h}} &= R_0 h_0 + S_0^1 h_1 + ... + S_0^N h_N = \mathbf{h}^T \begin{pmatrix} R_0 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= (1 \quad S_0^1 \quad ... \quad S_0^N) \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= \bar{\mathbf{S}}_0^T \mathbf{h} \\
&= \mathbf{h}^T \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{h} \bullet \bar{\mathbf{S}}_0 = \bar{\mathbf{S}}_0 \bullet \mathbf{h}
\end{aligned}
$$

den **Anfangswert der Handelsposition oder den Anschaffungswert der Handelsposition h** in $t = 0$ (also den **Wert des Portfolios** in $t = 0$ bzw. **die Anschaffungskosten des Portfolios** in $t = 0$), wobei wir

erweiterte Auszahlungmatrix?

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{S}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ \mathbf{S}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

definieren.

Wir werden gelegentlich $R_0 = 1$ angeben, um daran zu erinnern, dass wir diese Anlageform als Geldmarktkonto oder als Geldmarktanteile interpretieren können.

Manchmal ist die separate Behandlung/Notation des Geldmarktkontos lästig. Wir verwenden deshalb auch die Notation $S_0^0 = 1$ und $S_1^0 = R_1^f = R$

► Was wollen Anleger? Anleger bevorzugen ceteris paribus einen kleinen Wert $V_0^{\mathbf{h}}$ und ceteris paribus große Werte für $\mathbf{V}_{1,i}^{\mathbf{h}}$. Wir werden uns später genauer mit Präferenzen zu beschäftigen.

1.1.7 Definition: Es sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition. Wir definieren die **diskontierte Auszahlung** der Handelsposition $\mathbf{h}$:

$$V_1^{\mathbf{h},*} = \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R}.$$

Ausgeschrieben gilt:

$$\begin{aligned}
(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) &= \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R} \\
&= \frac{Rh_0 + S_1^1(\omega_k)h_1 + ...S_1^N(\omega_k)h_N}{R} \\
&= h_0 + \frac{S_1^1(\omega_k)}{R}h_1 + ... + \frac{S_1^N(\omega_k)}{R}h_N.
\end{aligned}$$

1.1.8 Definition: Es sei $\mathbf{h}$ eine Handelsposition. Dann heißt

$$\begin{aligned}
G^{\mathbf{h}} &= V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} \\
&= Rh_0 + S_1^1 h_1 + ... + S_1^N h_N - h_0 - h_1 S_0^1 - ... - h_N S_0^N \\
&= rh_0 + (S_1^1 - S_0^1)h_1 + ... + (S_1^N - S_0^N)h_N
\end{aligned}$$

Gewinn der Handelsposition $\mathbf{h}$. $G^{\mathbf{h}}$ ist natürlich nicht notwendigerweise nicht-negativ! **Gewinn-Verlust** wäre demnach die bessere Bezeichnung.

Es ist also $G^{\mathbf{h}}(\omega) = V_1^{\mathbf{h}}(\omega) - V_0^{\mathbf{h}}$ für $\omega \in \Omega$.

Der **diskontierte Gewinn** der Handelsposition $\mathbf{h}$ wird durch

$$G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} - V_0^{\mathbf{h}} = \frac{1}{R_1} V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$$

definiert. **Vorsicht der diskontierte Gewinn nicht der Gewinn diskontiert, denn $V_0^{\mathbf{h}}$ wird nicht diskontiert**. Genauer wäre die Formulierung Gewinn der diskontierten Werte, aber die klingt umständlich.

Wenn die Anschaffungskosten Null sind, dann nennen wir

$$G^{\mathbf{h}} = V_1^{\mathbf{h}}, V_0^{\mathbf{h}} = 0$$

einen **kostenlosen Gewinn** und

$$G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} = \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R}, V_0^{\mathbf{h}} = 0$$

einen **kostenlosen diskontierten Gewinn**.

1.1.9 Bemerkung: Es sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition. Wenn man $V_1^{\mathbf{h}}$ als Vektor auffasst, dann muss man *etwas* aufpassen. Es ist dann streng genommen $G^{\mathbf{h}} = V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} := V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}\mathbb{1}$, wobei

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$V_0^{\mathbf{h}}$ ist eine reelle Zahl und $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{Ah}$ ein Vektor. Eigentlich ist $V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ (Vektor minus Skalar) nicht definiert.

Wir werden in der Tat öfter Anlass haben von einem Vektor $\mathbf{v}$ einen Skalar α abzuziehen. Wir definieren

$$\mathbf{v} - \alpha := \mathbf{v} - \mathbb{1}\alpha.$$

1.2 Arbitrage

1.2.1 Definition: Eine Handelsposition $\mathbf{h}$ heißt **Arbitragemöglichkeit** oder einfach **Arbitrage**, wenn

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ **und**

ii.) $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$

gilt. Eine Arbitragemöglichkeit hat also einerseits Anschaffungskosten von Null und hat andererseits eine nicht-negative vom Nullvektor verschiedene zukünftige Auszahlung. Zu schön, um wahr zu sein.

▶ **Wir werden im Folgenden sehr ausführlich und genau charakterisieren, unter welche Bedingungen es keine Arbitrage gibt.** Wir betrachten zur Einführung ein einfaches Beispiel.

1.2.2 Bemerkung: Eine Handelsposition $\mathbf{h}$ ist genau dann eine Arbitrage, wenn

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = 0$,

ii.) $\mathbf{V_1^h} \geq \mathbf{0}$ **und** $V_1^{\mathbf{h}}(\omega) > 0$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$.

1.2.3 Satz: Eine Handelsposition $\mathbf{h}$ ist genau dann eine Arbitrage, wenn

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = 0$,

ii.) $\mathbf{V_1^h} \geq \mathbf{0}$ **und** $\mathbb{P}(\mathbf{V_1^h} > 0) > 0$.

▶ Die Charakterisierung einer Arbitrage gemäß des obigen Satz ist eigentlich besser, denn sie funktioniert auch für unendliche (nicht-diskrete) Ω; vgl. Föllmer und Schied [10, Seite 5].

1.2.4 Beispiel: Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es in diesem EPFMM eine Arbitragemöglichkeit?

Wenn $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist, dann $h_0 + 5h_1 = 0$. also $h_0 = -5h_1$. Für die Auszahlung gilt

$$\begin{aligned} V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{60}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{10}{9}h_0 + \frac{60}{9}h_1 \\ \frac{10}{9}h_0 + \frac{40}{9}h_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \cdot 5h_1 + \frac{60}{9}h_1 \\ -\frac{10}{9} \cdot 5h_1 + \frac{40}{9}h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix} h_1 \end{aligned}$$

Wenn $h_1 = 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Wenn $h_1 > 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Wenn $h_1 < 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Es kann also in diesem EPFMM **keine Arbitragemöglichkeiten** geben.

1.2.5 Beispiel: Es sei diesmal $r = \frac{1}{3}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}$, $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es in diesem EPFMM eine Arbitragemöglichkeit?

Es sei $\mathbf{h} = (5, -1)^T$. Dann ist $V_0^{\mathbf{h}} = h_0 + S_0 h_1 = 5 - 5 \cdot 1 = 0$. Für die Auszahlung gilt

$$V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{12}{9} & \frac{60}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}$$

Also $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$. Wir haben eine **Arbitrage** gefunden!

Arbitrageidee: In beiden Zuständen hat die Anlage am Geldmarkt eine mindestens so hohe Rendite, wie das Wertpapier. Die Rendite am Geldmarkt beträgt in beiden Zuständen $\frac{3}{9}$. Die Wertpapierrendite ist $\frac{3}{9}$ in ω_1 und $-\frac{1}{9}$ in ω_2. Wir (leer-)verkaufen (*shorten*) das Wertpapier (also $h_1 = -1$) und legen die daraus erhalten Mittel am Geldmarkt an (also $h_0 = 5$); das bedeutet $\mathbf{h} = (5, -1)^T$.

Im vorhergehenden Beispiel war die Geldmarktrendite *nur* $\frac{1}{9}$. Im Zustand ω_1 ist die Wertpapierrendite $\frac{3}{9}$ größer als diese Geldmarktrendite und in Zustand ω_2 ist die Wertpapierrendite $-\frac{1}{9}$ kleiner.

1.2.6 Bemerkung: Für $K = N + 1 = 2$ ist es sehr einfach, Arbitragemöglichkeiten – wenn es welche gibt – zu finden. Wenn die Rendite der riskanten Anlageform in beiden Zuständen mindestens so hoch wie die der Anlage am Geldmarkt und in einem Zustand höher ist, dann kauft man das riskante Wertpapier auf Kredit. Ist andererseits die Geldmarktrendite in beiden Zuständen mindestens so hoch wie die Rendite des riskanten Wertpapiers, dann verkaufen wir das riskante Wertpapier (leer) und legen den Leerverkaufserlös am Geldmarkt an.

1.2.7 Bemerkung: $\mathbf{h}$ ist genau dann eine **Arbitragemöglichkeit**, wenn $V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}) > 0$.

1.2.8 Bemerkung: Für $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ gilt $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$. Deshalb *reicht* $V_1^{\mathbf{h}} \geq 0$ als Charakterisierung für eine Arbitrage nicht aus. Andererseits setzen wir bei einer Arbitrage auch nicht voraus, dass $V_1^{\mathbf{h}}(\omega) > 0$ für alle ω gilt, obwohl auch das ein Ansatz sein kann (vgl. in Pliska [37, Kapitel 1] das Konzept der **dominanten Strategie**).

1.2.9 Bemerkung: i.) Gelegentlich findet man die Aussage, dass eine Arbitrage ein *risikoloser* Gewinn sei. Das ist aber mindestens missverständlich. Wenn ein Anleger die Position $\mathbf{h} = (1, 0, ..., 0)^T$ wählt und der Zins $r > 0$ positiv ist, dann ist der Gewinn für $\mathbf{h}$ gleich $V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} = 1 + r - 1 = r > 0$ risikolos und strikt positiv; aber $\mathbf{h}$ ist keine Arbitrage!

ii.) Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn es einen **kostenlosen** nicht-negativen (in diesem Sinn risikolosen) von Null verschiedenen Gewinn gibt, d.h. ein $\mathbf{h}$ mit

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbf{h}} &= 0 \\ 0 \neq V_1^{\mathbf{h}} &= G_1^{\mathbf{h}} \geq 0. \end{aligned}$$

Das ist so, da $V_1^{\mathbf{h}} = G_1^{\mathbf{h}}$ unter der Vorsetzungen $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist.

1.2.10 Bemerkung: Für den **diskontierten** Gewinn $G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} - V_0^{\mathbf{h}} = \frac{1}{R} V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ ist die Geldmarktposition h_0 irrelevant: Wenn $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$ zwei Handelspositionen mit gleichen Positionen für die riskanten Anlageform $\mathbf{h}_{1,i} = \mathbf{h}_{2,i}, i = 1, ..., N$ sind, dann stimmen die Gewinne $G^{\mathbf{h}_1,*} = G^{\mathbf{h}_2,*}$ überein; unabhängig von den Werten $\mathbf{h}_{1,0}$ bzw. $\mathbf{h}_{2,0}$.

► Es **gibt** einen weiteren Zusammenhang – außer dem aus 1.2.9 – zwischen Arbitrage und Gewinn, der durch die folgenden beiden Behauptungen erklärt wird. Relevant ist dabei der **diskontierte Gewinn**.

1.2.11 Behauptung: Es **gibt** genau dann eine Arbitrage, wenn es ein $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$ gibt; dabei ist $G^{\mathbf{h},*} = \frac{1}{R}V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ der **diskontierte Gewinn** der Handelsposition $\mathbf{h}$.

Es gibt also genau dann eine Arbitrage, wenn es einen risikolosen von Null verschiedenen diskontierten Gewinn gibt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung diskontierter Gewinn eigentlich irreführend ist. Besser wäre Gewinn aus den diskontierten Werten. ......

1.2.12 Behauptung: Ist $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_N)^T \in \mathbb{R}^N$ eine Handelsposition für die riskanten Anlageformen mit $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$. Dann ist $\mathbf{h}' = (h_0, h_1, ..., h_N), h_0 = -\mathbf{h} \bullet \mathbf{S}_0$ eine Arbitrage.

1.2.13 Bemerkung: Wir beobachten

$$
\begin{aligned}
G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0} \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{R} V_1^{\mathbf{h}} \geq V_0^{\mathbf{h}} \\
&\Leftrightarrow\; \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} \geq R \\
&\Leftrightarrow\; \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} - 1 \geq r \\
&\Leftrightarrow\; \frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} \geq r.
\end{aligned}
$$

Wenn die Renditen $\frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}}$ der Handelsposition (die unabhängig von h_0 ist) in allen Zuständen mindestens so hoch wie die Geldmarktrendite und von Null verschieden ist, dann gibt es eine Arbitrage.

Wir können auch die **Überschussrendite**

$$
\frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} - r
$$

betrachten. Wenn es eine Position mit einer (unter allen Umständen) nicht-negativen von Null verschiedenen Überschussrendite gibt, dann gibt es eine Arbitarge. Wenn es also möglich ist unter allen Umständen mindestens so gut wie der Geldmarkt zu sein und in einem Zustand sogar besser, dann gibt es eine Arbitrage.[3]

1.2.14 Satz Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn es eine $\mathbf{h}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} \neq 0$

Baustelle ......

[3] An arbitragefreien Finanzmärkten kann man nicht mal den Geldmarkt sicher schlagen.

$$r \neq \frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} \geq r$$

▶ Bei Arbitragefreiheit kann es also keine Position geben, deren Rendite immer mindestens so hoch ist wie die Geldmarktrendite und in mindestens einem Zustand echt höher.

1.2.15 Bemerkung Geometrische Interpretation von $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$; Ein diskontierter Arbitrage-Gewinn liegt also im ersten *Quadranten* (ohne den Nullpunkt). Diese Beobachtung wird sich noch als nützlich erweisen

Baustelle, wahrscheinlich an anderen Ort ......

1.2.16 Bemerkung: Wenn $\mathbf{h}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ eine sogenannte **Selbstmord-Handelsposition** mit $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \leq \mathbf{0}$ ist, dann ist $-\mathbf{h}$ eine Arbitrage. Ist $\mathbf{h}$ eine Arbitrage, dann ist $-\mathbf{h}$ eine Selbstmord-Strategie.

1.2.17 Bemerkung: Bei Arbitragefreiheit gilt: Wenn $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ ist, dann kann $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ nicht gelten. In Beweisen werden wir das so machen: Wir zeigen (durch **Fallunterscheidung**) für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ gibt es stets ein j mit $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$.

Bei Arbitragefreiheit gilt *sogar*: Wenn $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ ist, dann gibt es i, j mit $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_i) > 0, V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$. Würde $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_i) \leq 0$ für alle $i \neq j$ und $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$ gelten, dann wäre $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine

Selbstmordstrategie. Dann ist $-\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.18 Beispiel: Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}$, $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Dann gilt Arbitragefreiheit.

Wenn $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist, dann ist $h_0 + 5\,h_1 = 0$. Also $h_0 = -5\,h_1$. Für die Auszahlung gilt

$$V_1^{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix} h_1$$

$V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ impliziert $h_1 \neq 0$. Also gibt es zwei Fälle.

i.) Wenn $h_1 > 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit.

ii.) Wenn $h_1 < 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit.

Es kann also in diesem EPFMM keine Arbitragemöglichkeiten geben.

Wie in der vorherigen Bemerkung angegeben, gibt es im Fall $h_1 > 0$ einerseits einen Zustand mit einer negativen Auszahlung; nämlich $j = 2$. Es gibt aber auch einen Zustand mit einer positiven Auszahlung; nämlich $j = 1$.

1.2.19 Bemerkung: Arbitragemöglichkeiten sind beliebig skalierbar: Wenn $\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit ist, dann ist für alle $\alpha > 0$ auch $\alpha\,\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.20 Satz: Wenn es eine Handelsposition $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} < 0, V_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ gibt, dann gibt es eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.21 Bemerkung: Handelspositionen wie im vorhergehenden Satz werden in anderen Quellen ebenfalls Arbitragemöglichkeit genannt (so beispielsweise in Duffie [9, Seite 3]). Solche Handelsposition sind noch besser als die Arbitragemöglichkeiten gemäß unserer Definition: Man hat den finanziellen Vorteil schon in $t = 0$. Man könnte diesen Vorteil auf dem Geldmarkt anlegen und hätte dann **in jeden Zustand** eine positive Auszahlung; also eine *starke* Arbitrage.

▶ Wir haben bis hierhin *viele* Aspekte von Arbitrage gesammelt. ...... Redundanzen und etwaige Nichtverwendung im folgenden nehmen wir in Kauf. ......

1.2.22 Definition: Das EPFMM heißt **arbitragefrei**, wenn es keine Arbitrage gibt.

1.2.23 Bemerkung: Wir werden im folgenden Arbitragefreiheit als eine *plausible und vernünftige* Eigenschaft eines

EPFMM auffassen.[4]

Wenn es eine Arbitrage gäbe, dann könnte ein Anleger seinen Nutzen – diesen Begriff werden wir formal erst später einführen – grenzenlos steigern. *Übliche* Optimierungsprobleme der Portfoliotheorie hätten keine Lösung (vgl. Duffie [9, S. 5f]).

Wenn es eine Arbitrage gäbe, dann wäre zudem die Annahme exogener Preise fragwürdig. Anleger hätten schließlich Interesse an SEHR großen Arbitragepositionen. Es ist dann plausibel, dass sich Preise so anpassen, dass die Arbitragemöglichkeit verschwindet.

1.2.24 Satz (Law of one price, LOOP): Wenn das EPFMM arbitragefrei ist, dann gilt das Law of one price (LOOP):

$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}_1} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}_2} \Rightarrow V_0^{\mathbf{h}_1} = V_0^{\mathbf{h}_2}.$$

In Worten: Wenn zwei Positionen identische Auszahlungsprofile haben, dann müssen sie bei Arbitragefreiheit auch den gleichen Preis haben.

[4]Sollte Ihnen eine Arbitrage bekannt sein, so wäre es sehr wünschenswert, wenn Sie mir diese Position vertraulich mitteilen würden. Email an mj ät math-stat.de

1.3 Risikoneutralwahrscheinlichkeiten

▶ Es ist einfach eine sichere Auszahlung $\mathbf{X}$ (die man in $t = 1$ erhält) zu bewerten (den fairen Wert in $t = 0$ zu ermitteln). Der faire Preis muss $p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{1+r}$ sein. Wenn die Auszahlung riskant ist, dann könnten man versucht sein, die Formel $p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{X})}{1+r}$ zur Bewertung zu verwenden. Die Formel funktioniert sogar, aber mit einen *Twist*. Der Twist besteht darin, dass man nicht die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, ..., p_K$ nimmt, sondern solche Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, ..., q_K$, so dass die Gleichung stimmt. Das klingt nach Pippi Langstrumpf (ich mach mir die Welt; widewide wie sie mir gefällt) oder Freiherr von Münchhausen (am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen). In der Tat ist die *Erfindung* der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten ein Geniestreich, der eine neue Welt erschafft: die $\mathbb{Q}$-Welt bzw. die Risikoneutral-Welt. In dieser Welt kann man, wie wir sehen werden, großartige Dinge machen. Die folgenden Definition ist von herausragender Bedeutung.

▶ Bewertung (das erste mal) ...

1.3.1 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß** oder **Martingalwahrscheinlichkeitsmaß**, falls

i.) $q_k := \mathbb{Q}(\{\omega_k\}) > 0$ für $k = 1, ..., K$.

ii.) Für alle $i = 1, ..., N$ gilt

$$\begin{aligned} S_0^i &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1^i}{R}\right) = \sum_{k=1}^{K} q_k \frac{S_1^i(\omega_k)}{R} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1^{i*}\right) = \sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i*}(\omega_k). \end{aligned}$$

Die N Gleichungen kann man mit Matrizen in einer Gleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{S_1^*})^T \mathbf{q}.$$

Dabei ist $q_i = q(\omega_i) = \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$ und

$$\mathbf{S}_1^* = \begin{pmatrix} \frac{S_1^1(\omega_1)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R} \\ \frac{S_1^1(\omega_2)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{S_1^1(\omega_K)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R} \end{pmatrix} \in M(K, N, \mathbb{R})$$

ist die Matrix der **diskontierten Wertpapierauszahlungen** (also ohne eine Spalte für den Geldmarkt).

Wir nennen die Wahrscheinlichkeiten q_k der Ergebnisse ω_k **Risikoneutralwahrscheinlichkeiten**.

Die **Menge aller Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße** bezeichnen wir mit $\mathbb{M}$.

► Natürlich ergibt sich die Frage, ob (unter welchen Bedingungen) es solche magischen Wahrscheinlichkeiten wirklich gibt. Wir werden sehen, dass des solche WAhrscheinlichkeiten genau dann gibt, es keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Es fügt sich also alles ganz wunderbar.

1.3.2 Satz: Ein Vektor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^K$ mit $q_i > 0$ für alle $i = 1, ..., K$ definiert genau dann eine Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$, wenn

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$$

gilt. Dabei ist

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R} & ... & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R} & ... & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R} & ... & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R} \end{pmatrix} \in M(K, N+1, \mathbb{R})$$

die Matrix der diskontierten Auszahlungen aller Anlageformen und

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix}.$$

der Vektor der Wertpapierpreise (einschließlich Geldmarkt).

Wir erhalten im Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$ eine Gleichung je Anlageform: N für die N Basiswertpapiere und eine für den Geldmarkt; also insgesamt $N+1$ Gleichungen.

Dabei entspricht die Gleichung für den Geldmarkt gerade der Gleichung, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins addieren. Eine Lösung des Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$ ist aber nicht automatisch eine risikoneutrale Zähldichte. Die Lösung muss zudem $q_i > 0, i = 1, ..., K$ erfüllen!

1.3.3 Beispiel: i.) Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es Risikoneutralwahrscheinlichkeiten?

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$. Wir haben also Risikoneutralwahrscheinlichkeiten gefunden!

Modelle mit $K = 2$ und $N = 1$ kann man natürlich mit Bleistift und Papier lösen. Wenn man aber mit die Parameter variieren möchte, dann bietet sich computergestützte Lösung an. Auf `www.mathstat.de/fima` werden R und Python Skrite angeboten. ......

ii.) Es sei jetzt $r = \frac{1}{3}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

Wir betrachten wieder $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$; diesmal erhalten wir das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $q_1 = 1, q_2 = 0$. Diese Werte bilden jedoch keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten, denn $q_2 = 0$. Es kann keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten geben, denn die müssten das obige lineare Gleichungssystem lösen. Dieses lineare Gleichungssystem hat aber nur die eine Lösung $q_1 = 1, q_2 = 0$ und die definieren keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

Für die Spezifikation i.) gab es keine Arbitragemöglichkeit aber es gab Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Für die Spezifikation ii.) gab es Arbitragemöglichkeiten aber es gab keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Wir werden *gleich* sehen, dass das kein Zufalls ist.

1.3.4 Bemerkung: Wenn $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ist, dann gilt für alle Basiswertpapiere

$$S_0^i = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{S_1^i}{R} \right).$$

Wir erhalten also den aktuellen Wert als Erwartungswert des diskontierten zukünftigen Wertes. Es ist sehr wichtig, dass diese Identität mit $\mathbb{P}$ (anstatt mit $\mathbb{Q}$) im Allgemeinen nicht gilt. Im Allgemeinen ist $S_0^i \neq \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(S_1^i / R \right)$. Wären Anleger risikoneutral (auf die formale Definition von risikoneutral müssen wir noch warten), dann würde $S_0^i = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_1^i/R\right)$ gelten. Dementsprechend ist die Formulierung populär, dass in der $\mathbb{Q}$-Welt Risikoneutralität gilt. Es *gibt* aber nur eine Welt; die $\mathbb{P}$-Welt. Die $\mathbb{Q}$-Welt ist eine genial ausgedachte Welt der Finanzmathematik.

Das bedeutet also nicht, dass man für die Anwendbarkeit der Formeln/Theorie unterstellen würde, dass Anleger tatsächlich risikoneutral sind. Wenn man mit gewechselten Wahrscheinlichkeiten rechnet, dann kann man so rechnen, **als ob** Anleger risikoneutral wären. **Die transformierten Wahrscheinlichkeiten erfassen dabei die Risikoaversion**. Im Fall $K = 2$ kann man folgendes Beobachten. Der Anleger nutzt/rechnet mit pessimistischeren Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses wird hoch gesetzt; das beobachten wir jetzt in einem Beispiel.

1.3.5 Bemerkung: Um die Rolle der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten zu verstehen, betrachten wir eine Lotterie mit $X^1(\omega_1) = 50$, $X^1(\omega_2) = 100$ und $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = p = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1 - p = \frac{1}{2}$. Wenn man an dieser Lotterie teilnehmen will, dann muss man einen Preis V zahlen. Wie kann man den (höchsten für Kunden akzeptablen) Preis der Lotterie charakterisieren? Eine denkbare Antwort ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^1) = 75$. Dies ist schließlich die erwartete Auszahlung (der durchschnittliche Gewinn bei ∞-vielen unabhängigen Wiederholungen). Diese Antwort ist jedoch unbefriedigend. Angenommen wir betrachten eine zweite Lotterie: $X^2(\omega_1) = 70, X^2(\omega_2) = 80$. Dann ist (ebenfalls) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^2) = 75$. Die beiden Lotterien hätten also – wenn man sich am Erwartungswert orientiert – den gleichen Preis. Diese zweite Lotterie hat aber ein **geringeres Risiko**: Bei der zweiten Lotterie verliert man allenfalls 5 und bei der ersten 25. Angenommen wir betrachten eine dritte Lotterie: $X^3(\omega_1) = 75, X^3(\omega_2) = 75$. Dann ist (ebenfalls) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^3) = 75$. Alle drei Lotterien hätten – wenn man sich am Erwartungswert orientiert – den gleichen Preis. Es ist aber unbefriedigend, dass die unterschiedlichen Lotterien, den gleichen Preis haben sollen, obwohl sie unterschiedlich riskant sind. Es ist vielmehr plausibel, dass von den zwei Lotterien mit gleichem Erwartungswert diejenige mit einem höheren Risiko[5] einen geringeren Preis hat (unpopulärer ist).

Angenommen wir würden beobachten (auf einem gut funktionierenden Markt für Lotterien), dass die Lotterie X^1 für $V = 70$ gehandelt wird. Diesen Preis kann man als Erwartungswert charakterisieren. Man muss dazu aber **die Wahrscheinlichkeiten wechseln**. Wir beobachten

$$\begin{aligned} 70 &= q \cdot 50 + (1-q) \cdot 100 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses

[5]Wir gehen hier mit dem Begriff Risiko naiv um. Später werden wir sehen, dass nicht jedes Risiko preis-relevant ist. ....

ω_1 auf den höheren Wert $\frac{3}{5}$ (anstatt $\frac{1}{2}$) gesetzt wird, dann wird die Aversion gegen Risiko erfasst und der Preis V der Lotterie X^1 lässt sich (trotzdem) als Erwartungswert schreiben:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X^1) &= q \cdot X^1(\omega_1) + (1-q) \cdot X^1(\omega_2) \\ &= \frac{3}{5}50 + \frac{2}{5}100 = 70 = V.\end{aligned}$$

Also: Nach dem **Wechsel der Wahrscheinlichkeiten** (von $\mathbb{P}$ zu $\mathbb{Q}$) liefert **der mit $\mathbb{Q}$ berechnete Erwartungswert den beobachteten Preis**.

Wir können so rechnen, **als ob** Risikoneutralität gelten würde, obwohl sie tatsächlich nicht gilt. Die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses wird dabei hoch gesetzt. Dadurch wird die Risikoaversion erfasst.

Und bei anderen Lotterien? Ist der Marktpreis für die zweite Lotterie

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X^2) = \frac{3}{5}70 + \frac{2}{5}80 = 74?$$

Das wäre sehr bequem, denn dann könnte man alle Bewertungsaufgaben mit dem Wechsel zu **einem** Wahrscheinlichkeitsmaß linear lösen (der Erwartungswert ist ein linearer Operator).

Es wird sich in der Tat zeigen, dass man für die Wertpapierbewertung nur **ein** für alle Bewertungsaufgaben das **gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß** verwenden kann; und nicht etwa für jedes Wertpapier eine spezifische Anpassung der Wahrscheinlichkeiten.

▶ Wir werden jetzt viele Facetten der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten ermitteln. Nur mache der Facetten werden wir direkt verwenden. Sie werden also für etwaige später (oder viel spätere Anwendung genannt).

1.3.6 Bemerkung: i.) Die Gleichung $S_0^{i*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1^{i*}\right)$ bedeutet, dass **diskontierte** Wertpapierpreise in der $\mathbb{Q}$-Welt **im Durchschnitt über die Zustände unverändert** bleiben.

ii.) Es gilt (nur geringfügig anders formuliert als in i.)) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*}) = 0$. Die Aussage $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*}) = 0$ bedeutet, dass die erwarteten Zuwächse $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*})$ der diskontierten Wertpapierpreise unter $\mathbb{Q}$ Null sind. Die diskontierten Wertpapierpreise bleiben in der $\mathbb{Q}$-Welt *durchschnittlich* unverändert.

1.3.7 Bemerkung: Wir notieren – ebenfalls für den späteren Gebrauch – die **geometrische** Form der obigen Aussage:

$$
\begin{aligned}
& S_0^i = \sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i,*}(\omega_k) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i,*}(\omega_k) - S_0^i \sum_{k=1}^{K} q_k = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{K} q_k (S_1^{i,*}(\omega_k) - S_0^i) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{q} \perp (S_1^{i,*}(\omega_1) - S_0^i, ..., S_1^{i,*}(\omega_K) - S_0^i)^T \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{q} \perp (\Delta \mathbf{S}_1^{i,*}).
\end{aligned}
$$

Also: Der Vektor der Zuwächse $\Delta \mathbf{S}_1^{i,*}$ der diskontierten Wertpapierpreise stehen **orthogonal** (bezüglich des Standardskalarprodukts) auf den Risikoneutralwahrscheinlichkeiten $\mathbf{q}$.

1.3.8 Defintion (Wiederholung): Es sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition. Wir definieren die **diskontierte Auszahlung** der Handelsposition $\mathbf{h}$:

$$(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) := \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R}.$$

Ausgeschrieben gilt:

$$
\begin{aligned}
(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) = \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R} &= \frac{Rh_0 + S_1^1(\omega_k)h_1 + ...S_1^N(\omega_k)h_N}{R} \\
&= h_0 + \frac{S_1^1(\omega_k)}{R}h_1 + ... + \frac{S_1^N(\omega_k)}{R}h_N.
\end{aligned}
$$

1.3.9 Bemerkung: Es sei

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R} \end{pmatrix} \in M(K, N+1, \mathbb{R})$$

die Matrix der diskontierten Auszahlungen aller Anlageformen; also einschließlich des Geldmarktes.

Die obige Gleichung $(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) = h_0 + \frac{S_1^1(\omega_k)}{R} h_1 + \dots + \frac{S_1^N(\omega_k)}{R} h_N$ für die Zufallsvariablen kann man mit Matrizen auch so angeben

$$(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \mathbf{h}.$$

1.3.10 Satz: $\mathbf{q}$ definiert genau dann eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit $\mathbb{Q}$, wenn $\mathbf{q} \gg 0$ und für alle Handelspositionen $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gilt:

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbf{h}} &= \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R} = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) (V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) \\ &= \mathbf{q}^T (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \mathbf{q} \bullet (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((V_1^{\mathbf{h}})^* \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung $(V_0^{\mathbf{h}})^* = V_0^{\mathbf{h}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R} \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left((V_1^{\mathbf{h}})^* \right)$ bedeutet, dass **sich das Prinzip der Risikoneutralbewertung von den Basiswertpapieren auf die Auszahlung beliebiger Handelspositionen fortsetzen lässt**. Diese **Fortsetzungseigenschaft** ist sehr nützlich und von grundsätzlicher Bedeutung!

Wir haben oben in 5 Gleichungen 5 Varianten der gleichen Aussage angegeben. Es ist je nach Zusammenhang eine der Varianten bequemer, deshalb ist die Redundanz sinnvoll.

1.3.11 Bemerkung: i.) Wir haben früher festgestellt, dass für die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten $\mathbf{q}$ und die Zuwächse $\Delta\mathbf{S}_1^{i,*}$

$$\mathbf{q} \perp \Delta\mathbf{S}_1^{i,*}$$

gilt. Wir erhalten auch hier eine Fortsetzungseigenschaft von den Basisprodukten auf alle erreichbaren Auszahlungsprofile. Es gilt also analog für alle Handelspositionen $\mathbf{h}$ und deren Gewinn der diskontierten Werte $G^{\mathbf{h},*} = \Delta(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^*$

Also ist iii.) redundant?

$$\mathbf{q} \perp (\Delta(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^*)$$
$$\mathbf{q} \perp G^{\mathbf{h},*}$$

wobei $\Delta(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* - V_0^{\mathbf{h}}$.

Hier kann man den Geldmarkt *weglassen*? $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$?

ii.) Für alle kostenlosen $\mathbf{h}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ gilt

$$\mathbf{q} \perp (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^*.$$

Also ist der Vektor der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten orthogonal zu den diskontierten kostenlosen Auszahlungen.

iii.) Es sei **h** eine Handelsposition mit diskontiertem Gewinn $G^{\mathbf{h},*}$. Wir betrachten die Handelsposition

$$\mathbf{h}' = \begin{pmatrix} h_0 - V_0^{\mathbf{h}} \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathbf{h}'$ den gleichen Gewinn wie **h** und die Anschaffungskosten sind Null.

Mit ii.) folgt, dass die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten **q** orthogonal zu allen diskontierten Gewinnen ist. Aber das wussten wir schon. ......

iv.) **Baustelle** ...... Wir betrachten die $K \times N$ Matrix

$$\Delta\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \frac{S_1^1(\omega_1)}{R} - S_0^1 & \dots & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R} - S_1^N \\ \frac{S_1^1(\omega_2)}{R} - S_0^1 & \dots & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R} - S_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{S_1^1(\omega_K)}{R} - S_0^1 & \dots & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R} - S_1^N \end{pmatrix}$$

q ist genau dann eine RNW, wenn $\sum q_i = 1, q_i > 0$ und **q** ist orthogonal auf den Spalten von $\Delta\mathbf{S}^*$. **q** ist genau dann orthogonal auf den Spalten von $\Delta\mathbf{S}^*$, wenn **q** im Kern von

$(\Delta\mathbf{S}^*)^T$ ist, d.h.

$$(\Delta\mathbf{S}^*)^T\mathbf{q} = 0.$$

Die erreichbaren Gewinne sind genau die Vektoren

$$(\Delta\mathbf{S}^*)\mathbf{h},$$

d.h. der Spaltenraum von $(\Delta\mathbf{S}^*)$. Gemäß des Hauptsatzes der Linearen Algebra

$$\mathrm{Col}(\Delta\mathbf{S}^*) \oplus \mathrm{Kern}(\Delta\mathbf{S}^*)^T.$$

Wir finden also alle RNW in $\mathrm{Kern}(\Delta\mathbf{S}^*)^T$. Es ist o.B.d.A. $\dim \mathrm{Col}(\Delta\mathbf{S}^*) = N$. Dann ist $\dim \mathrm{Kern}(\Delta\mathbf{S}^*)^T = K - N$. Gibt es immer $K - N$ linear unabhängige RNWen?

1.3.12 Satz: Es sei $\mathbb{Q}$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß und $\mathbf{h}$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}}\right] = R.$$

Alle Anlageformen und sogar alle erreichbaren Profile haben in der $\mathbb{Q}$-Welt die **gleiche erwartete Rendite**; nämlich die Rendite der risikolosen Anlageform. In der *echten* Welt (also in der $\mathbb{P}$-Welt) mit risikoaversen Anlegern kann das *natürlich* nicht gelten. Risikoaverse Anleger wollen für die Übernahme von Risiken mit einer höheren erwarteten

Rendite entschädigt werden. Wir werden uns später ausführlich mit der **Risikoprämie** beschäftigen. wo? ....

1.4 Der erste Hauptsatz der Assetbewertung

Für die Formulierung und den Beweis des 1. Hauptsatzes sind die folgenden Vorbereitungen nützlich. Die folgenden Argumente orientieren sind an Pliska [37, Seite 13 ff] und Williams [51, Seite 34 ff].

1.4.1 Satz: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \in \mathbb{M} &\Leftrightarrow \mathbf{q} \gg 0, \sum_{i=1}^{K} q_i = 1, \mathbf{q} \perp \mathcal{V}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q} \in \mathcal{V}^{*\perp} \cap \mathcal{P}^+,\end{aligned}$$

wobei[6]

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^* &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}})^*, V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}, \\ \mathcal{P}^+ &= \{\mathbf{p} \mid \sum_{k=1}^{K} p_i = 1, \mathbf{p} \gg 0\}.\end{aligned}$$

Man könnte auch die Menge $\mathbb{W} = \{\mathbf{Z} | \mathbf{Z} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}/R - \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}} = \mathbf{G}_1^{\mathbf{h},*}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}$ betrachten; und sogar mit $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$. ......?

Beweis: Es sei $\mathbf{h}$ eine Handelsposition und $\mathbf{q} \in \mathcal{V}^{*\perp} \cap \mathcal{P}^+$

[6] $\mathbf{x} \gg 0$ bedeutet $x_i > 0$ für alle i.

der Vektor der $\mathbb{Q}$ definiert. Wir zeigen $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((V_1^{\mathbf{h}})^*\right) = V_0^{\mathbf{h}}$. Wir definieren $\widetilde{\mathbf{h}} = (h_0 - V_0^{\mathbf{h}}, h_1, ..., h_n)^T$. Dann folgt $V_0^{\widetilde{\mathbf{h}}} = 0$ und $(V_1^{\widetilde{\mathbf{h}}})^* \in \mathcal{V}^*$. Aus $\mathbf{q} \in \mathcal{V}^{*\perp}$ folgt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((V_1^{\widetilde{\mathbf{h}}})^*) = 0$. Ferner gilt

$$(V_1^{\widetilde{\mathbf{h}}})^* = \mathbf{A}^*\widetilde{\mathbf{h}} = \mathbf{A}^*\mathbf{h} - V_0^{\mathbf{h}} = (V_1^{\mathbf{h}})^* - V_0^{\mathbf{h}}.$$

Dann folgt schließlich $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((V_1^{\mathbf{h}})^*\right) = V_0^{\mathbf{h}}$

1.4.2 Bemerkung: i.) Wir bemerken, dass $\mathcal{V}^*$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^K$ ist. $\mathcal{V}^*$ ist der Unterraum der **kostenlos erreichbaren diskontierten Auszahlungen**.

ii.) Es sei

$$\mathbb{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{X} \neq \mathbf{0}\}.$$

$\mathbb{A}$ ist die Menge aller (auch möglicherweise nicht erreichbaren) denkbaren Auszahlungen, die – wenn sie kostenlos erreichbar sind – zu **Arbitragemöglichkeiten** gehören.

Arbitragefreiheit bedeutet demnach $\mathcal{V}^* \cap \mathbb{A} = \emptyset$.

iii.) Es sei

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}}), V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}.$$

Es gilt: $\mathcal{V} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\mathcal{V}^* \neq \emptyset$. Die Menge $\mathcal{V}$ ist einerseits *natürlicher* als $\mathcal{V}^*$, trotzdem verwenden wir $\mathcal{V}^*$. Es gilt: $\mathbf{q}$ definiert genau dann ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\mathbf{q} \gg 0, \sum_{i=1}^K q_i = 1, \mathbf{q} \perp \mathcal{V}^*$ gilt (also ist auch $\mathcal{V}^*$ *natürlich*) . In dieser Äquivalenz ist $\mathcal{V}^*$ relevant und wir interessieren uns für Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

iv.) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^* &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}})^*, V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\} \\ &= \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}})^* - V_0^{\mathbf{h}} = G^{\mathbf{h},*}\} =: \mathbb{G}^*\end{aligned}$$

Arbitragefreiheit bedeutet demnach $\mathbb{G}^* \cap \mathbb{A} = \emptyset$.

1.4.3 Satz über die trennende Hyperebene: Es sei U ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^K$ und $C \subset \mathbb{R}^K$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge von $\mathbb{R}^K$ und es gelte $U \cap C = \emptyset$. Dann gibt es eine Hyperebene $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} = 0\}$ mit $U \subset H$ und $\mathbf{p} \bullet \mathbf{n} > 0$ für alle $\mathbf{p} \in C$.

Wir beachten auch: Wegen $U \subset H$ gilt auch für alle $\mathbf{u} \in U$ die Orthogonalitätseigenschaft $\mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0$.

$\mathbf{p} \bullet \mathbf{n} > 0$ bedeutet geometrisch, dass $\mathbf{p}$ auf den gleichen Seite der Hyperebene liegt wie der Normalvektor $\mathbf{n}$.

Beweis: Vgl. Williams [51, Abschnitt 3.6].

1.4.4 Erster Hauptsatz: Es gilt

$$\mathcal{V}^* \cap \mathbb{A} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{M} \neq \emptyset.$$

Es gibt genau dann ein Risikoneutralwahrschein-

lichkeitsmaß, wenn Arbitragefreiheit gilt.

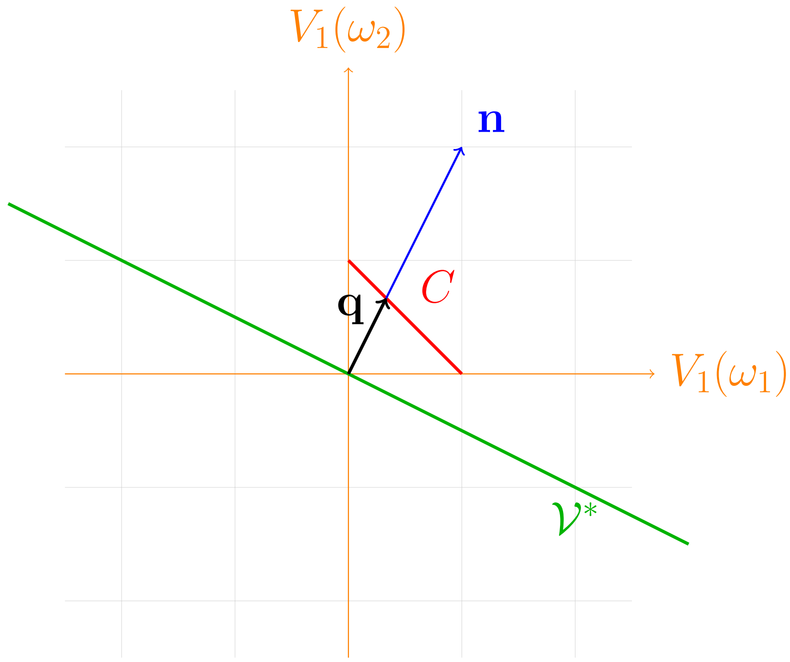


Abbildung 1.4.1: Die Abbildung (vgl. Pliska [37, ...]) illustriert den Beweis des 1 HS. $\mathcal{V}^*$ darf den 1 Quadranten nicht schneiden. C ist kompakt, abgeschlossen und disjunkt zum Unterraum $\mathcal{V}^*$ (denn C liegt im ersten Quadranten). Dann gibt es eine Hyperebene durch Null mit normalen Vektor $\mathbf{n}$ und diese Hyperebene umfasst $\mathcal{V}^*$. Also ist $\mathbf{n}$ orthogonal zu $\mathcal{V}^*$. Dann ist $\mathbf{q} = {}^{\mathbf{n}}/_{(\mathbf{n}_1 + \ldots \mathbf{n}_k)}$ ist ein Vektor mit Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Denn die Komponenten addieren sich zu Eins sind alle strickt positiv und orthogonal auf $\mathcal{V}^*$.

1.4.5 Bemerkung: Wenn es ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß gibt, dann können wir die Risikoneutralbewertungsmethoden verwenden. Das wäre schön. Arbitragefreiheit ist eine vernünftige Annahme. Genau dann wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, dann gibt es ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß. Es fügt sich also sehr schön.

Der erste Hauptsatz heißt aus mit gutem Grund **Haupt**satz. Genau unter der vernünftigen Voraussetzung der Arbitragefreiheit gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, so dass

$$V_0^{\mathbf{h}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{1+r}\right).$$

bzw.

$$V_0^{\mathbf{h}*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(V_1^{\mathbf{h}*}\right)$$

Exkurs: Farkas und Stiemke

Dieser Exkurs ist noch eine Baustelle ....

Wir haben den ersten Hauptsatz mit dem Trennungssatz bewiesen. Man kann den Hauptsatz auch mit Farkas Lemma beweisen (vgl. Pliska [37, S. 16]).

1.4.6 Lemma von Farkas: Es sei $\mathbf{M}$ eine $m \times n$ Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ein.

Dann hat entweder das System

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

oder das System

$$\mathbf{y}^T\mathbf{M} \leq 0, \mathbf{b}^T\mathbf{y} > 0$$

eine Lösung.

► Zunächst beachten wir den Zusammenhang zwischen Arbitrage und dem Lemma von Farkas (das ist eine Übungsaufgabe aus Pliska [37, Seite 16])

1.4.7 Lemma (Arbitrage und Farkas Lemma): Es sei $\mathbf{M}$ die $(2N+K)\times(K+1)$ Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \Delta S_1^{1,*}(\omega_1) & -\Delta S_1^{1,*}(\omega_1) & ... & \Delta S_N^{1,*}(\omega_1) & -\Delta S_N^{1,*}(\omega_1) & -1 & 0 & ... & 0 \\ \Delta S_1^{1,*}(\omega_2) & -\Delta S_1^{1,*}(\omega_2) & ... & \Delta S_N^{1,*}(\omega_2) & -\Delta S_N^{1,*}(\omega_2) & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \Delta S_1^{1,*}(\omega_K) & -\Delta S_1^{1,*}(\omega_K) & ... & \Delta S_N^{1,*}(\omega_K) & -\Delta S_N^{1,*}(\omega_K) & 0 & 0 & ... & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = (1, 0, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^{K+1}$$

Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn es ein $\mathbf{x} \geq 0$ mit $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ gibt. [Das ist die erste Alternative aus dem Lemma von Farkas]

1.4.8 Beweis des ersten Hauptsatz mit Farkas Lemma:

► Noch direkter (in der Tat einen SEHR direkten Beweis) erhält man einen Beweis des ersten Hauptsatzes mit dem Lemma von Stiemke.

1.4.9 Lemma von Stiemke: Es sei $\mathbf{M}$ eine $m \times n$ Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ein.

Dann hat entweder das System

$$\mathbf{Bx} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$$

oder das System

$$\mathbf{B}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y}_i > 0$$

eine Lösung.

Beweis: Vgl. Jungnickel [28, Seite 42]

1.4.10 Beweis des Hauptsatzes mit dem Lemma von Stiemke:

1.5 Bewertung bedingter Auszahlungen

Die Bewertung von **Derivaten** gehört zu den Basiskompetenzen eines Finanzmathematikers. Wir definieren bedingte Auszahlungen, die uns als Modell für Derivate dienen.

1.5.1 Definiton: Eine **bedingte Auszahlung** für[7] $t = 1$

[7] Die Auszahlung erhält der Inhaber im Zeitpunt $t = 1$.

ist eine Zufallsvariable[8] $\mathbf{X}: \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \mathbf{X}(\omega)$.

1.5.2 Definiton: Eine bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$ heißt **replizierbar** oder **erreichbar**, wenn es eine Handelsposition $\mathbf{h}$ mit $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{X}$ gibt. $\mathbf{h}$ heißt dann die **replizierende Handelsposition** für $\mathbf{X}$. $V_0^{\mathbf{h}}$ nennt man die **Replikationskosten** von $\mathbf{X}$.

1.5.3 Bemerkung: Wir bemerkten, dass die Replikationskosten für $\mathbf{X}$ **wohldefiniert** sind. In der Tat: Wir bemerken, dass die Replikationskosten unabhängig von der replizierenden Position sind (wegen LOOP, vgl. Satz 1.2.24): Wenn $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$ beide das Profil $\mathbf{X}$ replizieren, dann haben $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$ die gleichen Anschaffungskosten, d.h. es gilt $\mathbf{V}_0^{\mathbf{h}_1} = \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}_2}$.

1.5.4 Bemerkung: $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{X}$ gilt genau dann, wenn $\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$ gilt. Die Frage nach der Replizierbarkeit entspricht also der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$. In der Terminologie der Linearen Algebra: $\mathbf{X}$ ist in dem Raum, der von den Spalten von $\mathbf{A}$ erzeugt wird: $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

1.5.5 Definiton: Wir betrachten ein arbitragefreies EPFMM und fügen eine weitere Anlagemöglichkeit hinzu. $p_{\mathbf{X}}$ sei der

[8] Zufallsvariablensind im Allgemeinen messbar. Die müssen wir hier nicht angeben, da $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist.

Preis zu dem der Anleger das Finanzprodukt mit der Auszahlung $\mathbf{X}$ kaufen kann. Wenn das **erweiterte EPFMM** arbitragefrei bleibt, dann heißt der Preis $p_{\mathbf{X}}$ **mit Arbitragefreiheit vereinbar** bzw. **fair**.

Die Auszahlungsmatrix **des erweiterten EPFMM** bezeichnen wir mit

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} R_1^f & S_1^1(\omega_1) & ... & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) & X(\omega_1) \\ R_1^f & S_1^1(\omega_2) & ... & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) & X(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1^f & S_1^1(\omega_K) & ... & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) & X(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(K, N+2; \mathbb{R})$$

und den Vektor der Preise des erweiterten EPFMM mit

$$\bar{\bar{\bar{S}}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{S}_0 \\ p_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}.$$

▶ Die Aufgabe des Finanzmathematikers besteht jetzt darin, den fairen Preis oder die fairen Preise zu ermitteln. Wir lernen zunächst zwei Bewertungsmethoden kennen: Bewertung durch Replikation und das Risikoneutralbewertungsprinzip. Später werden wir drei weitere Methoden kennen lernen.

1.5.6 Satz (Bewertung durch Replikation): Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{X}$ mit der Handelsposition $\mathbf{h}$ replizierbar, d.h. $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h}$. Dann ist

$$p_{\mathbf{X}} = V_0^{\mathbf{h}}$$

der einzige faire Preis für $\mathbf{X}$.

1.5.7 Satz (Risikoneutralbewertungsprinzip): Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{X}$ eine replizierbare bedingte Auszahlung. Dann gilt für den fairen Preis von $\mathbf{X}$

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right),$$

wobei $\mathbb{Q}$ (irgend-)ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ist.

1.5.8 Bemerkung: Wenn für alle ω^* Derivate mit Auszahlung

$$\mathbf{X}_{\omega^*}(\omega) = \begin{cases} R^f & : \text{falls } \omega = \omega^* \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

für $\mathbf{p}_{\mathbf{X}_{\omega^*}}$ gehandelt werden (oder durch Portfolios $\mathbf{h}_{\omega^*}$ repliziert werden können), dann erhält man eine Technik, um die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten zu ermitteln:

$$(V_0^{\mathbf{h}_{\omega^*}} =) \quad \mathbf{p}_{\mathbf{X}_{\omega^*}} = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{X}_{\omega^*}}{R^f}\right) = \sum_{\omega} \mathbb{Q}(\omega^*)\frac{\mathbf{X}_{\omega^*}}{R^f} = \mathbb{Q}(\omega^*).$$

Da sich diese Wahrscheinlichkeiten aus den beobachteten Preisen (implizit) ergeben, spricht man von **impliziten Risikoneutralwahrscheinlichkeiten**. Man kann auch sagen, dass die Preise die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten offenlegen.

Die **impliziten Risikoneutralwahrscheinlichkeiten** kann man auch auf Basis der folgenden bedingten Auszahlungen ermitteln:[9]

$$\mathbf{X}^{\mathrm{BF}}_{\omega^*}(\omega) = \begin{cases} 1 & : \text{falls } \omega = \omega^* \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Man ermittelt Handelsposition $\mathbf{h}^{\mathrm{BF}}_{\omega^*}$, die $\mathbf{X}^{\mathrm{BF}}_{\omega^*}$ replizieren. Dann gilt[10]

$$R^f V_0^{\mathbf{h}^{\mathrm{BF}}_{\omega^*}} = \mathbb{Q}(\omega^*).$$

▶ Für den späteren Gebrauch notiernen wir noch die folgende Bemerkung.

1.5.9 Bemerkung: i.) Es sei $\mathbf{h}$ eine Handelsposition und $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$ Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Dann gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right)$$

und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(V_1^{\mathbf{h}}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(V_1^{\mathbf{h}}\right).$$

ii.) Wenn $\mathbf{X}$ replizierbar ist und $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$ Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right)$$

[9]BF steht für Butterfly.

[10]Vgl. auch Hull [14, Seite 468] für diese Methode (in einem anderen Kontext). Die Werte $V_0^{\mathbf{h}^{\mathrm{BF}}_{\omega^*}}$ entsprechen den sogenannten Zustandspreisen, die wir ab 1.8.1 behandeln.

und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}(\mathbf{X}).$$

1.6 Vollständige Finanzmärkte und Eindeutigkeit des Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß

1.6.1 Definiton: Das EPFMM heißt **vollständig**, wenn es für jede bedingte Auszahlung $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ eine replizierende Position $\mathbf{h}$ gibt, d.h. es gibt ein $\mathbf{h}$ mit $\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$.

1.6.2 Bemerkung: Wir betrachten die Auszahlungsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) \\ R & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R & S_1^1(\omega_K) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times 1+N}$$

und eine bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$. Es gibt genau dann eine replizierende Position $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{1+N}$, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$$

eine Lösung $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{1+N}$ hat.

Vollständigkeit bedeutet also, dass das lineare Gleichungssystem für **jede rechte Seite** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ den Rang K hat (wenn die Matrix $\mathbf{A}$ K linear unabhängige Spalten hat), so dass die Spalten von $\mathbf{A}$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^K$ aufspannen. Mit noch anderen Worten: Die Spalten bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^K$ (alle denkbaren $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$).

▶ Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

1.6.3 Satz: Das EPFMM ist genau dann vollständig, wenn Rang $\mathbf{A} = K$ ist.

1.6.4 Zweiter Hauptsatz: In einem arbitargefreien EPFMM gilt Vollständigkeit genau dann, wenn es genau **ein** Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß gibt.

Mit anderen Worten: **In einem arbitargefreien** EPFMM ist die **Vollständigkeit** äquivalent zur **Eindeutigkeit** des Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaßes.

Vorsicht: Die Formulierung Vollständigkeit ist äquivalent zur Eindeutigkeit ist üblich aber ungenau! In einem vollständigen EPFMM kann es Arbitragemöglichkeiten geben. Dann gibt es (natürlich) kein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß.

1.6.5 Bemerkung: Wenn das EPFMM vollständig ist, dann hat $\mathbf{A} \in M(K, N+1; \mathbb{R})$ den Rang K. Offenbar hat dann auch $\mathbf{A}^* \in M(K, N+1; \mathbb{R})$ den Rang K. Der Rang von $(\mathbf{A}^*)^T \in M(N+1, K; \mathbb{R})$ und von $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ ist ebenfalls K (vgl. z.B. Garcia und Horn [11, S. 303] oder Meyer [33, S. 212]). Also ist $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ eine $K \times K$ Matrix mit Rang K; also ist $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ invertierbar. Wir erhalten damit eine geschlossene Formel für die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten $\mathbf{q}$. In der Tat, aus der Bewertungsformel $(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q} = \bar{\mathbf{S}}_0$ folgt, dass $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q} = \mathbf{A}^*\bar{\mathbf{S}}_0$. Schließlich

Campbell?

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\right)^{-1} \mathbf{A}^*\,\bar{\mathbf{S}}_0.$$

Wir haben einen alternativen (auch kurzen Beweis) für die Implikation, Arbitragefrei und Vollständigkeit impliziert Eindeutigkeit, gefunden. In der Tat: Wenn $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ Vektoren mit Risikoneutralwahrscheinlichkeiten sind, dann gilt $(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{S}}_0, i = 1, 2$. Dann sind die beiden $\mathbf{q}_i$ auch Lösungen der linearen Gleichung $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q}_i = \mathbf{A}^*\bar{\mathbf{S}}_0$. Die $K \times K$ Matrix $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ hat den Rang K. Dann ist die Lösung des linearen Gleichungssystems eindeutig bestimt. Also $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$.

Kann man die Eindeutigkeit auch an $(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{S}}_0, i = 1, 2$ ablesen.

1.6.6 Bemerkung: Wenn das arbitragefreie EPFMM vollständig ist, dann gibt es für alle bedingten Auszahlungen nur einen Preis, der mit Arbitragefreiheit vereinbar ist und diesen Preis kann man mit den Formeln $p_X = V_0^{\mathbf{h}}$ oder $p_X = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X/B)$ berechnen. Also: Die Finanzpreise der das EPFMM definierenden Anlagemöglichkeiten (den **Basiswertpapieren**) legen die Preise beliebiger bedingter Aus-

Die Preise der Basiswerpapiere erfüllen untereinander Arbitragefreiheit. .....

zahlungen (den **Derivaten**) eindeutig fest. Ermittelt werden **relative Bewertungen**; relativ zu den Basiswertpapieren.

1.7 Unvollständige Märkte und Arbitragegrenzen

Wenn das arbitragefreie EPFMM unvollständig ist, dann gibt es für nicht replizierbare Auszahlungen **viele** Preise, die mit Arbitragefreiheit vereinbar sind. Diese Aussage wird im folgenden substantiviert, wobei wir uns (wieder) an Pliska [37] und Williams [51] orientieren. Wir werden sogenannte Arbitragegrenzen ermitteln zwischen denen die Preise liegen, die mit Arbitragefreiheit vereinbar sind.

1.7.1 Definition: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und es gelte Arbitragefreiheit. Es sei $\mathbb{Q}$ ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß. Wir definieren die folgenden Operatoren[11] auf der Menge der bedingten Auszahlungen

Wir suchen die preiswerteste Superreplikation. .....

$$V^+(\mathbf{X}) = \inf\{\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}] \,|\, \mathbf{Y} \geq \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ replizierbar } \},$$
$$V^-(\mathbf{X}) = \sup\{\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}] \,|\, \mathbf{Y} \leq \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ replizierbar } \},$$

Beachte, dass die Wahl von $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ für die Werte $V^+(\mathbf{X})$ und $V^-(\mathbf{X})$ irrelevant ist: da Y replizierbar ist, nimmt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ den gleichen Wert an.

[11] Wir sprechen bei V^* und V^- von Operatoren, da sie auf Abbildungen (nämlich auf die Zufallsvariablen $\mathbf{X}$) angewendet werden.

Ein erreichbares Auszahlungsprofil $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ heißt **Superreplikation** von $\mathbf{X}$. Da $\mathbf{Y}$ immer (in allen Zuständen) mindestens so gut wie $\mathbf{X}$ ist, sind plausible Preise von $\mathbf{X}$ kleiner oder gleich dem fairen Preis $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}]$ von $\mathbf{Y}$. Das gilt für alle Superreplikationen von $\mathbf{X}$. Wir erhalten deshalb mit $V^+(\mathbf{X})$ die kleinste obere Schranke (da wir das Infimum bilden).

Ein erreichbares Auszahlungsprofil $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$ heißt **Subreplikation** von $\mathbf{X}$. Wir erhalten mit $V^-(\mathbf{X})$ die größte untere Schranke (da wir das Supremum bilden).

$V^+(\mathbf{X})$ und $V^-(\mathbf{X})$ heißen auch obere bzw. untere **Arbitragegrenze**. Wir suchen also möglichst preiswerte Superreplikationen und möglichst wertvolle Subreplikationen. ......

1.7.2 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und es gelte Arbitragefreiheit. Es gibt replizierbare $\mathbf{Y}^+, \mathbf{Y}^-$ mit $V^+(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^+/\mathbf{R}_1]$ bzw. $V^-(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^-/\mathbf{R}_1]$. Für nicht replizierbare $\mathbf{X}$ gilt dabei: $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}^+ \geq \mathbf{X}$ und $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}^- \leq \mathbf{X}$.

Man kann also eine replizierbare Superreplikation finden, deren fairer Wert genau der oberen Arbitragegrenze entspricht.

Die Optimierungsprobleme hat also Lösungen. ......

1.7.3 Bemerkung: Obwohl also $V^+(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^+/\mathbf{R}]$ gilt, kann für nicht-replizierbare $\mathbf{X}$ die Gleichung $\mathbf{Y}^+ = \mathbf{X}$

nicht gelten; sonst wäre $\mathbf{X}$ replizierbar (mit $\mathbf{h}^*$). Also muss $\mathbf{Y}^+(\omega) > \mathbf{X}(\omega)$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$ gelten.

1.7.4 Satz: In einem arbitargefreien EPFMM gilt, dass $\mathbf{X}$ genau dann nicht replizierbar ist, wenn $V^+(\mathbf{X}) > V^-(\mathbf{X})$ ist.

1.7.5 Satz: Gegeben sei ein arbitragefreies EPFMM sowie sowie eine **nicht-replizierbare** bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$. Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn die bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$ (in $t = 0$) zu einem Preis $p \geq V^+(\mathbf{X})$ oder zu einem Preis $p \leq V^-(\mathbf{X})$ gehandelt wird. Nur für $p \in (V^-(\mathbf{X}), V^+(\mathbf{X}))$ bleibt die Arbitragefreiheit erhalten.

Ruth Williams, Seite 48: *In fact, ... are also not arbitrage free initial prices in this case.*

1.7.6 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_J \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$ eine maximal linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$ (und so eine Basis von $\mathbb{W}^\perp$), wobei $\mathbb{W} = \{\mathbf{Z} | \mathbf{Z} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}/R - \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}} = \mathbf{G}_1^{\mathbf{h},*}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}$. Dann gilt:

Warum kann man eine solche Basis finden; Baustelle. Vgl. Williams Seite 49 oder Pliska Seite 25.

(1) Die Menge der $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^K$ mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &\geq \mathbf{X} \\
\mathbf{U} - \frac{\mathbf{Y}}{R} &= 0 \\
\lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_1 &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_J &= 0 \\
\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^K, \mathbf{U} &\in \mathbb{R}^K
\end{aligned}$$

entspricht der Menge der erreichbaren Auszahlungen $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$.
(2) Wenn $\mathbf{Y}$ das obige System erfüllt, dann ist λ ein fairer Preis von $\mathbf{Y}$.

▶ Baustelle: Wenn U ein Unterraum mit Dimension d ist und O eine Menge, so dass $U \cap O^{\circ} \neq \emptyset$ gilt, dann gibt es d linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_d$ in $U \cap O^{\circ}$. Es sei $u_1 \in U \cap O^{\circ}$. Wir ergänzen u_1 mit $u_2, ..., u_d$ zu einer Basis von U. Dann ist auch $v_1 = u_1, v_2 = u_1 + \varepsilon u_2, v_3 = u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon u_3, ...$ eine Basis von U. Für hinreichend kleines ε gilt auch für $i = 1, ..., d$ $v_i \in U \cap O^{\circ}$ ().

1.7.7 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_J \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^{\perp} \cap \mathbb{P}^{+}$ eine Basis von $\mathbb{W}^{\perp}$, wobei $\mathbb{W} = \{\mathbf{Z} | \mathbf{Z} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}/R - \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}} = \mathbf{G}_1^{\mathbf{h},*}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}$.

Es sei λ^{+} die Lösung des linearen Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimiere} & \lambda \\
\text{u.d.N.} & \mathbf{Y} \geq \mathbf{X} \\
& \mathbf{U} - \dfrac{\mathbf{Y}}{R} = 0 \\
& \lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_1 = 0 \\
& \vdots \\
& \lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_J = 0 \\
& \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^K \text{ erreichbar }, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^K
\end{array}$$

Dann gilt

$$\lambda^+ = V^+(\mathbf{X})$$

1.7.8 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_J \in \mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{P}^+$ eine Basis von $\mathbb{W}^\perp$, wobei $\mathbb{W} = \{\mathbf{Z} | \mathbf{Z} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}/R - \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}}\}$.

Es sei λ^- die Lösung des linearen Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \lambda \\ \text{u.d.N.} & \mathbf{Y} \leq \mathbf{X} \\ & \mathbf{U} - \dfrac{\mathbf{Y}}{R} = 0 \\ & \lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_1 = 0 \\ & \vdots \\ & \lambda - \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_J = 0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^K \text{ erreichbar }, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^K \end{array}$$

Dann gilt

$$\lambda^- = V^-(\mathbf{X})$$

1.7.9 Satz: Es sei $\mathbb{M} \neq \emptyset$. Für jede bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} V^+(\mathbf{X}) &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathbb{M}} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{X}/\mathbf{R}_1] \,|\, \mathbb{Q} \in \mathbb{M}\} \\ V^-(\mathbf{X}) &= \inf_{\mathbb{Q} \in \mathbb{M}} \{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{X}/\mathbf{R}_1] \,|\, \mathbb{Q} \in \mathbb{M}\} \end{aligned}$$

1.7.10 Beispiel: Es sei $N = 1, r = 1/9, K = 3, S_0 = 5, S_1(\omega_1) = 60/9, S_1(\omega_2) = 40/9, S_1(\omega_3) = 30/9$.

- Gilt Vollständigkeit für das so definierte EPFMM?

- Bestimmen Sie die Menge der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

- Bestimmen Sie die Menge der fairen Preise des Auszahlungsprofils $(7, 5, 4)^T$

- Bestimmen Sie die Menge der fairen Preise des Auszahlungsprofils $(1, 0, 0)^T$

- Die Auszahlungsmatrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10/9 & 60/9 \\ 10/9 & 40/9 \\ 10/9 & 30/9 \end{pmatrix}.$$

- Offensichtlich ist $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = K$. Also ist das EPFMM unvollständig!

- Also ist $\#(\mathbb{M}) = 0$ oder $\#(\mathbb{M}) = \infty$. [$\#(\mathbb{M}) = 1$ würde gemäß 2'tem Hauptsatz Vollständigkeit implizieren!]

- Schema für das WP

$$
S_0 = 5 \begin{cases} \longrightarrow S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, r_S(\omega_1) = 33.33\% \\ \longrightarrow S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}, r_S(\omega_2) = -11.11\% \\ \longrightarrow S_1(\omega_3) = \frac{30}{9}, r_S(\omega_3) = -33.33\% \end{cases}
$$

- Schema für GM

$$
1 \begin{cases} \longrightarrow B_1(\omega_1) = \frac{10}{9}, r(\omega_1) = r = 11.11\% \\ \longrightarrow B_1(\omega_2) = \frac{10}{9}, r(\omega_2) = r = 11.11\% \\ \longrightarrow B_1(\omega_3) = \frac{10}{9}, r(\omega_3) = r = 11.11\% \end{cases}
$$

Arbitragefrei

- Vermutlich ist das EPFMM arbitragefrei, denn es gibt keine Anlageform die uniform besser ist.
  - Im Zustand ω_1 ist das WP besser. In den Zuständen ω_2, ω_3 ist der GM besser.
- Vermutlich ist es also so: Es gibt unendlich viele RN-WM: $\#(\mathbb{M}) = \infty$

b.) Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße

- Wir müssen das LGS $(\mathbf{A}^*)^T \mathbf{q} = (1, 5)^T$, wobei

$$
(\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.
$$

- Wir suchen nach Lösungen mit $q_i > 0$.

b.) Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße

- Wir gehen also von diesen beiden Gleichungen aus:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \\ 6q_1 + 4q_2 + 3q_3 &= 5 \end{aligned}$$

- Gl. 1 $\times(-3)$ plus Gl. 2:

$$3q_1 + q_2 = 2 \Rightarrow \; q_2 = 2 - 3q_1$$

- Wir beobachten

$$q_2 > 0 \;\Leftrightarrow 2 - 3q_1 > 0 \Leftrightarrow q_1 < \frac{2}{3}$$

b.) Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße

- Wir gehen wieder von diesen beiden Gleichungen aus:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= 1 \\ 6q_1 + 4q_2 + 3q_3 &= 5 \end{aligned}$$

- Gl. 1 $\times(-4)$ plus Gl. 2:

$$2q_1 - q_3 = 1 \Rightarrow \; 2q_1 - 1 = q_3$$

- Wir beobachten

$$q_3 > 0 \ \Leftrightarrow 2q_1 - 1 > 0 \Leftrightarrow q_1 > \frac{1}{2}$$

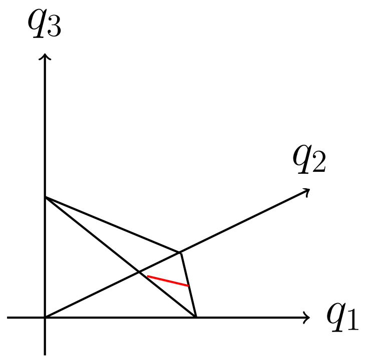
b.) Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße

- Für $q_1 \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ist $q_2 = 2-3q_1 > 0$ und $q_3 = 2q_1-1 > 0$

- Die RNWM werden also durch Wahrscheinlichkeiten auf der Strecke

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2-3\lambda \\ 2\lambda - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

- Für $\lambda = 1/2$ bzw. $\lambda = 2/3$ erhalten die Punkte $(1/2, 1/2, 0)^T$ respektive $(2/3, 0, 1/3)^T$. Diese definieren aber keine RNWM; sondern nur die Endpunkte der Strecke. Die Risikoneutralelementarwahrscheinlichkeiten liegen im inneren der Strecke. Die Strecke liegt auf dem Dreieck $q_1 + q_2 + q_3 = 1, q_i \in [0, 1]$.



c.) Replikation und Bewertung von $\mathbf{X} = (7,5,4)^T$

- Die bedingte Auszahlung $(7,5,4)^T$ ist replizierbar, denn
- $\mathbf{h} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10})^T$ löst das LGS

$$\begin{pmatrix} 10/9 & 60/9 \\ 10/9 & 40/9 \\ 10/9 & 30/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Die Anschaffungskosten sind $V_0^{\mathbf{h}} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \cdot 5 = 5.4$.

c.) Replikation und Bewertung von $\mathbf{X} = (7,5,4)^T$

- Die bedingte Auszahlung $(7,5,4)^T$ ist replizierbar, deshalb kann man sie mit dem Risikoneutralbewertungsprinzip eindeutig bewerten: Wir wählen z.B. $\lambda = \frac{6}{10}$. Dann $\mathbf{q} = (\frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10})^T$ und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{\mathbf{X}}{\frac{10}{9}}\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{\frac{10}{9}} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{\frac{10}{9}} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{\frac{10}{9}} = 5.4$$

- Für andere $\lambda \in (1/2, 2/3)$ erhält man ebenfalls 5.4!

d.) Replikation und Bewertung von $\mathbf{X} = (1,0,0)^T$

- Die bedingte Auszahlung $(1,0,0)^T$ ist **nicht** replizierbar, denn
- Das folgende LGS hat keine Lösung (das können und

sollen Sie mit Methoden der L.A. selbständig verifizieren!)

$$\begin{pmatrix} 10/9 & 60/9 \\ 10/9 & 40/9 \\ 10/9 & 30/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Also geht Bewertung mit Replikation nicht.

d.) Replikation und Bewertung von $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$

- Wenn $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ Risikoneutralelementarwahrscheinlichkeiten sind, dann können wir so fair bewerten:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{\mathbf{X}}{\frac{10}{9}}\right) = \frac{9}{10} \cdot q_1$$

- Wegen $q_1 \in (1/2, 2/3)^T$ erhalten wir, dass alle Preise im Intervall $(0.45, 0.6)$ fair sind. Alle anderen Preise sind unfair. Insbesondere sind auch 0.45 und 0.6 unfair!

1.8 Zustandspreise, stochastische Diskontfaktoren und Risikoneutralwahrscheinlichkeiten

Für bestimmte Fragestellungen sind anstatt der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten drei alternative im Wesentlichen äquivalente Konzepte nützlich: **Zustandspreise, stochastische Diskontfaktoren und Likelihood Quotienten**.

1.8.1 Definition: $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^K_{>0}$ heißt **Zustandspreisvektor**, falls

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0$$

gilt. Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{pmatrix} R_1^f & R_1^f & \dots & R_1^f & R_1^f \\ S_1^1(\omega_1) & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^1(\omega_{K-1}) & S_1^1(\omega_K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_1^N(\omega_1) & S_1^N(\omega_2) & \dots & S_1^N(\omega_{K-1}) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}(\omega_1) \\ \boldsymbol{\psi}(\omega_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix},$$

d.h. für die Wertpapiere mit den Kennnummern $i = 1, ..., N$ gilt

$$S_0^i = \sum_{k=1}^K S_1^i(\omega_k)\psi(\omega_k)$$

und aus der Gleichung für den Geldmarkt ergibt sich

$$1 = \sum_{k=1}^K R_1^f \psi(\omega_k).$$

1.8.2 Satz: Es gibt genau dann einen Zustandspreisvektor, wenn es ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß gibt.

1.8.3 Bemerkung: Das Wertpapier mit der Wertpapiernummer j mit der Auszahlung[12] $S_1^j(\omega_k) = \delta_{jk}$ heißt **Arrow-Debreau-Wertpapier**.[13] Für einen Zustandspreisvektor $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^K_{>0}$ erhalten wir für die Arrow-Debreau-Wertpapiere

$$S_0^j = \sum_{k=1}^{K} \psi_k S_1^j(\omega_k) = \psi_j.$$

Es kostet also ψ_j Geldeinheiten, um sich für genau den Zustand j die Zahlung einer Geldeinheit zu reservieren. Die Bezeichnung Zustandspreis ist also passend: Man kann für diesen Preis genau für diesen Zustand eine Zahlung von 1 Geldeinheit sichern.

1.8.4 Bemerkung: Die Gleichung $\mathbf{A}^T\boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0$ können wir als Bewertungsgleichungen für die Basiswertpapiere mit den Kennnummern $i = 1, ..., N$ auffassen. Diese Preise sind aber gegeben und wir benötigen gar keine Bewertungsgleichungen für diese Wertpapiere. Wir sind eigentlich an der Bewertung von erreichbaren Profilen $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ interessiert. Die naheliegende Frage, ob sich die Bewertungsgleichung auch auf $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ überträgt, haben wir schon für Risikoneutralwahrscheinlichkeiten affirmativ beantwortet. Ein analoges Resultat gilt für Zustandspreise.

1.8.5 Satz: Das EPFMM sei arbitragefrei und $\boldsymbol{\psi}$ ein Zustandspreisvektor. Es sei zudem $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $p_{\mathbf{X}}$ der

[12] δ_{jk} bezeichnet hier das Kronecker Delta.

[13] Über Kenneth Arrow `https://de.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow` und über Gerald Debreu `https://de.wikipedia.org/wiki/Gerard_Debreu`

faire Preis von $\mathbf{X}$. Dann gilt

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{X} \bullet \boldsymbol{\psi}.$$

1.8.6 Beispiel: Es sei $r = \frac{1}{9} = 0.11$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten haben wir bereits bestimmt: Es gilt $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$. Um die Zustandspreise zu bestimmten, löst man

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{10}{9} \\ \frac{60}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des LGS ist $\psi_1 = 0.45, \psi_2 = 0.45$.

1.8.7 Definition: Eine Zufallsvariable $\mathbf{m} : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ – bzw. $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^K$ – heißt **stochastischer Diskontfaktor**, falls für den Geldmarkt bzw. für Wertpapierpreise gilt:

Die Positivität wird von Back [1, Seite 52] nicht vorausgesetzt; von z.B. Munk [35] schon.

$$1 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) m(\omega_k) R_1^f = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m} R_1^f),$$

$$S_0^i = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) m(\omega_k) S_1^i(\omega_k) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m}\mathbf{S}_1^i), \ \ i = 1, ..., N.$$

1.8.8 Bemerkung: i.) Für die Bestimmung der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten kann man das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}^*)^T \mathbf{q} = \bar{\mathbf{S}}_0$$

und zur Bestimmung der Zustandspreise das LGS

$$(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0.$$

Für die stochastischen Diskontfaktoren erhalten wir ebenfalls ein lineare LGS

$$(\mathbf{A})^T \operatorname{Diag}(p_1, ..., p_k)\, \mathbf{m} = \bar{\mathbf{S}}_0.$$

Wenn (jeweils) eine Lösung $\gg 0$ vorliegt, dann liegen Risikoneutralwahrscheinlichkeiten, Zustandspreise bzw. stochastische Diskontfaktoren vor.

ii.) Wenn der $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = K$, dann können wir auch den Trick von vorne verwenden, um eine Lösung zu suchen. Dann ist nämlich $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = K$. Also ist $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ invertierbar. Dann können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A})^T \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0 \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{A}(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{S}}_0 \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{A}(\mathbf{A})^T)^{-1}\mathbf{A}\bar{\mathbf{S}}_0. \end{aligned}$$

Analog geht das auch für die stochastischen Diskontfaktoren.

iii.) Wenn $K > N+1$ (das passt besser zur Realität), dann hat das LGS $(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0$ weniger Gleichungen (nämlich $N+1$) als Unbekannte (jedes Wertpapier stiftet eine Gleichung). Wenn es eine Lösung gibt, dann gibt es unendlich viele.

Frage: Kann man mit dem Darstellungssatz von Riesz eine Lösung finden?

1.8.9 Bemerkung: Es sei $\mathbf{m}$ ein stochastischer Diskontfaktor. Es gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m}) = \frac{1}{R_1^f} = Z.$$

Für den **Diskontfaktor** $\frac{1}{R_1^f}$ einer risikolosen Zahlung verwenden wir die Notation Z. Die Bemerkung besagt, dass der Erwartungswert des stochastischen Diskontfaktors Z ist.

1.8.10 Satz: Es gibt genau dann einen stochastischen Diskontfaktor, wenn es ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß gibt.

► Auch für stochastische Diskontfaktoren gilt die Fortsetzungseigenschaft von den Basisprodukten zu den erreichbaren Profilen.

1.8.11 Satz: Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{m}$ ein stochastischer Diskontfaktor. Es sei zudem $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $p_{\mathbf{X}}$ der faire Preis von $\mathbf{X}$. Dann gilt

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{mX}).$$

1.8.12 Beispiel: Es sei $r = \frac{1}{9} = 0.11$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten haben wir bereits bestimmt: Es gilt $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$. Auch die Zustandspreise haben wir bestimmt. Es gilt $\psi_1 = 0.45, \psi_2 = 0.45$. Den stochastischen Diskontfaktoren bestimmen wir mit der Formel

$$m_i = \frac{1}{1+r}\left(\frac{q_i}{p_i}\right).$$

Es gilt $m_1 = 0.6, m_2 = 1.8$.

1.8.13 Definition: Eine Zufallsvariable $\mathbf{d} : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ – bzw. $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^K$ – heißt **Likelihood Quotient bzw. Radon-Nikodym-Ableitung**, falls gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) d(\omega_k) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{d}), \\ S_0^i &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) d(\omega_k) \frac{\mathbf{S}_1^i(\omega_k)}{R_1^f} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{d}\,\frac{\mathbf{S}_1^i}{R_1^f}\right),\ i = 1, ..., N. \end{aligned}$$

1.8.14 Satz: Es gibt genau dann einen Likelihood Quotienten, wenn es ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß gibt.

► Es gilt $d(\omega_k) = \frac{\mathbb{Q}(\omega_k)}{\mathbb{P}(\omega_k)}$. Deshalb ist die Bezeichnung Likelihood Quotient passend. Warum auch der Name Radon-Nikodym Ableitung passend ist, erschließt sich erst, wenn man zeitstetige zustandsstetige Finanzmathematik betreibt.

1.8.15 Satz: Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{d}$ ein Likelihood Quotient. Es sei zudem $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $p_{\mathbf{X}}$ der faire Preis von $\mathbf{X}$. Dann gilt

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{d}\,\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right).$$

1.8.16 Bemerkung: Wir betrachten die vier **Wertpapierbewertungsgleichungen** wegen der besseren Vergleichbarkeit nochmal gemeinsam:

$$\begin{aligned}
S_0^i &= \sum_{k=1}^{K} \psi(\omega_k) S_1^i(\omega_k) \\
S_0^i &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) m(\omega_k) S_1^i(\omega_k) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m}\mathbf{S}_1^i) \\
S_0^i &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{Q}(\omega_k) \frac{S_1^i(\omega_k)}{R_1^f} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbf{S}_1^i}{R_1^f}\right) \\
S_0^i &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k) d(\omega_k) \frac{S_1^i(\omega_k)}{R_1^f} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{d}\,\frac{\mathbf{S}_1^i}{R_1^f}\right).
\end{aligned}$$

An den oben stehenden Gleichungen kann man mit **Koeffizientenvergleich** die **Umrechnungsregeln** ablesen:

- Wenn $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^K_{>0}$ ein Zustandspreisvektor ist, dann ist durch $m(\omega_i) = \frac{\psi(\omega_i)}{\mathbb{P}(\omega_i)}$ ein stochastischer Diskontfaktor und durch $\mathbb{Q}(\omega_i) = \psi(\omega_i) R_1^f$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit definiert. Ein Likelihood Quotient ist $d(\omega_k) = \frac{\psi(\omega_i)}{\mathbb{P}(\omega_i)} R_1^f$.

- Wenn $\mathbb{Q}$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit ist, dann ist durch $m(\omega_i) = \frac{\mathbb{Q}(\omega_i)}{\mathbb{P}(\omega_i) R_1^f}$ ein stochastischer Diskontfaktor und durch $\psi(\omega_i) = \frac{\mathbb{Q}(\omega_i)}{R_1^f}$ ein Zustandspreisvektor definiert. Ein Likelihood Quotient ist durch $d(\omega_k) = \frac{\mathbb{Q}(\omega_k)}{\mathbb{P}(\omega_k)}$ definiert.

- Wenn $\mathbf{m}$ ein stochastischer Diskontfaktor ist, dann ist durch $\psi(\omega_i) = \mathbb{P}(\omega_i)m(\omega_i)$ und durch $\mathbb{Q}(\omega_i) = \mathbb{P}(\omega_i)m(\omega_i)R_1^f$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit definiert. Ein Likelihood Quotient ist durch $d(\omega_k) = m(\omega_k)R_1^f$ definiert.

- Wenn $\mathbf{d}$ ein Likelihood Quotient ist, dann ist $\mathbb{Q}(\omega_k) = \mathbb{P}(\omega_k)d(\omega_k)$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit und $m(\omega_k) = \frac{d(\omega_k)}{R_1^f}$. Ein Zustandspreisvektor ist durch $\psi(\omega_k) = \frac{\mathbb{P}(\omega_k)d(\omega_k)}{R_1^f}$ definiert.

1.8.17 Bemerkung: Wir haben drei Darstellungen der Wertpapierbewertung für erreichbare Profile als **Erwartungswerte**:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) \\
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{d}\,\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) \\
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m}\mathbf{X})
\end{aligned}
$$

Der stochastische Diskontfaktor und die Radon-Nikodym-Ableitung werden gemeinsam mit dem *empirischen* Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ verwendet. Wenn man (nur) den Zins $\frac{1}{R^f}$ der risikolosen Anlageform zum diskontieren verwendet, dann muss man zum Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ wechseln.

1.8.18 Bemerkung Interpretation $m(\omega) = \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega) R_1^f}$: Der Diskontfaktor für risikolose Profile ist $\frac{1}{R_1^f}$. Mit diesem Faktor werden risikolose Zahlungen diskontiert. Um Risikoaversion zu erfassen und riskante Zahlungen zu diskontieren wird $Z = \frac{1}{R_1^f}$ noch mit dem Likelihood Quotient der Wahrscheinlichkeiten $\frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$ multipliziert. Das geschieht Zustand für Zustand bevor der Erwartungswert (bezüglich $\mathbb{P}$) gebildet wird. Wir hatten für den Fall $K = 2$ gesehen, dass gute Zustände in der $\mathbb{Q}$-Welt typischerweise eine geringere Wahrscheinlichkeit haben als in der $\mathbb{P}$-Welt. Der Likelihood Quotient $\frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$ ist für den guten Zustand kleiner als 1 und für den schlechten Zustand größer als. Zahlungen in guten Zuständen werden stärker *abgewertet*, denn Zahlungen in guten Zuständen sind nicht so wertvoll, wie Zahlungen in schlechten Zuständen. (Wenn $K > 2$ ist, dann ist es leider unübersichtlicher.)

Wir betrachten wieder das Beispiel einer Lotterie mit $\mathbb{P}(X = 100) = 1/2$ und $\mathbb{P}(X = 50) = 1/2$. Wir nehmen an, dass $R^f = 1$ ist und der faire Preis der Lotterie gleich 70. Wir hatten die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten bestimmt: $\mathbb{Q}(X = 100) = 2/5$, $\mathbb{Q}(X = 50) = 3/5$. Dann ist $\mathbb{Q}(X = 100)/\mathbb{P}(X = 100) = 4/5$ (also wie angekündigt kleiner 1 für den guten Zustand) und $\mathbb{Q}(X = 50)/\mathbb{P}(X = 50) = 6/5$ (also wie angekündigt größer 1 für den guten Zustand).

Wir überprüfen $p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{mX})$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 50 = \frac{1}{2} \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot 60 = 70.$$

Bei dieser Form den fairen Wert zu bestimmen, werden die Auszahlungen angepasst und die empirischen Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}$ verwenden.

1.8.19 Bemerkung: i.) Wir beobachten für erreichbare Profile $\mathbf{X}$ Vgl. Munk [?, Seite 97]

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{mX}) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}) + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) \\ &= Z \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}) + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) \\ &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f} + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Der Preis des Wertpapiers ergibt sich also aus der diskontierten erwarteten Auszahlung zuzüglich einer **Risikoanpassung** $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ (die aber auch negativ sein kann).

Typischerweise – jedenfalls für *viele* Wertpapiere – gilt $p_{\mathbf{X}} < \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f}$, denn Anleger wollen für die Übernahme von Risiken entschädigt werden und zahlen deshalb weniger als den diskontierten Erwartungswert. Also ist $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ typischerweise negativ. Gemäß $p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f} + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ ist also $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ dann ein **Risikoabschlag**, den der Anleger als Kompensation für die Übernahme von Risiken erwartet (im obigen Beispiel beträgt der Abschlag 5 [von 75 auf 70]).

Im nächsten Abschnitten werden wir diesen Abschlag bzw. die sogenannte Risikoprämie nochmal untersuchen.

Für Finanzprodukte mit $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) > 0$ ist der Preis sogar **größer** als der diskontierte Erwartungswert. Finanzprodukt mit $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) > 0$ erzeugen einen Versicherungseffekt/Hedgingeffekt, der einen *scheinbar zu* hohen Preis rechtfertigt (nämlich größer als der diskontierte Erwartungswert).

Insbesondere gilt für Finanzprodukte mit $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) > 0$

$$p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f} + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) > \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f} = p_{\mu_{\mathbf{X}}\mathbb{1}}.$$

wobei $\boldsymbol{\mu}_X = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})$. Die Ungleichung $p_{\mathbf{X}} > p_{\mu_{\mathbf{X}}\mathbb{1}}$ bedeutet, dass $\mathbf{X}$ teurer (wertvoller) als $\mu_{\mathbf{X}}\mathbb{1}$ ist, obwohl die beiden Profile den gleichen Erwartungswert haben und die Lotterie $\mathbf{X}$ riskanter als die konstante Zahlung $\mu_{\mathbf{X}}\mathbb{1}$ (insbesondere $\mathbb{V}(\mathbf{X}) > \mathbb{V}(\mu_{\mathbf{X}}\mathbb{1}) = 0$) ist.

ii.) Demnach ist insbesondere auch die Varianz der Zahlung eines Finanzproduktes kein geeigneter Maßstab für das **bewertungsrelevante Risiko** eines Wertpapiers. Bezogen auf die Bewertung ist es falsch Risiken *isoliert* zu erfassen. Für die Bewertung ist die **Kovarianz** zum stochastischen Diskontfaktor ausschlaggebend!

Gemäß

$$p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f} + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}).$$

erfasst die Kovarianz $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ den Risikoabschlag. Das bewertungsrelevante Risiko wird also durch $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})$ erfasst und nicht durch $\mathbb{V}(\mathbf{X})$.

Für Wertpapiere mit $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) = 0$ gilt insbesondere

$$p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X})}{R_1^f},$$

selbst dann wenn und $\mathbb{V}(\mathbf{X}) > 0$.

1.8.20 Bemerkung (Give me five): Insgesamt kennen wir jetzt 5 Bewertungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}} &= \sum_{k=1}^{K} \psi(\omega_k)\mathbf{X}(\omega_k) \\
p_{\mathbf{X}} &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k)d(\omega_k)\frac{\mathbf{X}(\omega_k)}{R^f} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbf{d}\,\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) \\
p_{\mathbf{X}} &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(\omega_k)m(\omega_k)\mathbf{X}(\omega_k) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m}\mathbf{X}) \\
p_{\mathbf{X}} &= \sum_{k=1}^{K} \mathbb{Q}(\omega_k)\frac{\mathbf{X}(\omega_k)}{R^f} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) \\
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})
\end{aligned}$$

1.8.21 Bemerkung: Wir beobachten

Vorzeichen von λ. Bei Cochrane mit - Zeichen.

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{R^f}{R^f}\frac{\mathbb{V}(\mathbf{m})}{\mathbb{V}(\mathbf{m})}\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X}) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{R^f\,\mathbb{V}(\mathbf{m})}{R^f}\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})}{\mathbb{V}(\mathbf{m})} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{1}{R^f}\frac{\mathbb{V}(\mathbf{m})}{\mathbb{E}(\mathbf{m})}\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{m}, \mathbf{X})}{\mathbb{V}(\mathbf{m})} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{1}{R^f}\lambda_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}.
\end{aligned}
$$

$\lambda_{\mathbf{m}} = \frac{\mathbb{V}(\mathbf{m})}{\mathbb{E}(\mathbf{m})}$ erfasst den **Preis des Risikos** und $\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{m},\mathbf{X})}{\mathbb{V}(\mathbf{m})}$ das **Ausmaß (die Quantität) des Risikos**. Gemäß

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{1}{R^f}\lambda_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}} \\
&= \frac{1}{R^f}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}) + \lambda_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}\right)
\end{aligned}
$$

setzt sich der faire Preis für $\mathbf{X}$ aus drei Komponenten zusammen:

- Dem diskontierten Erwartungswert $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right)$. Das wäre der Preis bei Risikoneutralität, wenn die Anleger keine Kompensation für die Übername von Risiko erwarten würden.

- Dem bewerteten Risiko $\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$ des Wertpapiers. Das Wertpapier mit der Auszahlung $\mathbf{X}$ ist riskant. Es ist naheliegend dieses Risiko durch die Varianz zu messen und zu vermuten, dass eine höhere Varianz mit einem geringerem Preis einhergeht. Das ist jedoch *ungenau*. Wir müssen genau den *Teil* des Risikos erfassen, der in den Preis für das Wertpapier eingeht. Dieser bewertete Teil ist $\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$; die *skalierte* **Kovarianz**.

- Dem (diskontierten) **Preis des Risikos** $\lambda_{\mathbf{m}}$.

Die Anpassung für das Risiko ergibt sich aus dem Produkt $\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$ für Ausmaß des Risikos und dem Preis $\lambda_{\mathbf{m}}$ je Risiko. Insgesamt – einschließlich der Diskontierung – erhalten wir die Anpassung $\frac{1}{R^f}\lambda_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$.

Hinweis zum Vorzeichen von λ: In der Literatur – z.B. in Cochrane [5, Seite 16] und Munk [35, Seite 97] – wird

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \frac{1}{R^f}\lambda_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$$

in der Form

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) - \frac{1}{R^f}\tilde{\lambda}_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{X},\mathbf{m}}$$

mit $\tilde{\lambda}_{\mathbf{m}} = -\frac{\mathbb{V}(\mathbf{m})}{\mathbb{E}(\mathbf{m})}$ angegeben. Mich verwirrt aber minus minus und an dieser Stelle ist der (doppelte) Wechsel der Vorzeichen aus meiner Sicht nicht nützlich. Ich hoffe, dass durch diesen Hinweis etwaige Missverständnisse vermieden werden können.

1.8.22 Beispiel: Es sei $r = \frac{1}{9} = 0.11$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}$, $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Das EPFMM ist vollständig und arbitragefrei. Wir haben folgendes berechnet:

Risikoneutralwahrscheinlichkeit	$q_1 = 0.5, q_2 = 0.5$
Zustandspreise	$\psi_1 = 0.45, \psi_2 = 0.45$
Stochastische Diskontfaktoren	$m_1 = 0.6, m_2 = 1.8$

Wir beobachten, dass der erste Zustand der *bessere* ist, denn dort ist die Auszahlung des riskanten Wertpapier höher. Die Anleger sind risikoavers, denn der beobachtete Preis $S_0 = 5$, ist geringer als der diskontierte Erwartungswert $\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{60}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{40}{9}\right) = 5.5$.

Die Risikoneutralwahrscheinlichkeit für den guten Zustand ist niedriger als die empirische Wahrscheinlichkeit. .....

$$5 = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{60}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{9}\right)$$

Auch am stochastischen Diskontfaktor kann man die Anpassung wegen der Risikoaversion ablesen.

$$5 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{60}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{18}{10} \cdot \frac{40}{9}\right)$$

anstatt

$$5.5 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{60}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{40}{9}\right)$$

Die Auszahlung im guten Zustand wird stark mit $\frac{6}{10}$ diskontiert (anstatt mit $\frac{9}{10}$) und die Auszahlung im schlechten Zustand sogar mit $\frac{18}{10}$ *vergrößert*.

Für die Replikation vergleiche `https://www.mathstat.de/EPFMM_1_1_2_ff.R` bzw. `https://www.mathstat.de/EPFMM_1_1_2_ff.py`

1.8.23 Beispiel: Wir betrachten jetzt (noch) ausführlicher ein einfaches Beispiel und *deklinieren* **alle** Argumente einschließlich Interpretation durch. Es sei $r = 0.1$, $S_0 = 10$, $S_1(\omega_1) = 12.5, S_1(\omega_2) = 10$. $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$.

Wir nutzen R oder Python und bestimmen die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten, die Zustandspreise und die stochastischen Diskontfaktoren. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Risikoneutralwahrscheinlichkeit} \quad & q_1 = 0.4, q_2 = 0.6 \\ \text{Zustandspreise} \quad & \psi_1 = 0.\overline{36}, \psi_2 = 0.\overline{54} \\ \text{Stochastische Diskontfaktoren} \quad & m_1 = 0.\overline{72}, m_2 = 1.\overline{09} \end{aligned}$$

Die wirklichen Wahrscheinlichkeiten sind $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$ und der diskontierte Erwartungswert der riskanten Auszahlung ist

$$\frac{1}{1.1}\left(\frac{1}{2}\cdot 12.5 + \frac{1}{2}\cdot 10\right) = 10.22727.$$

Das wäre bei Risikoneutralität der Preis des riskanten Wertpapiers. Gezahlt wird aber 10. In Geldeinheiten beträgt der Risikoabschlag demnach 0.22727.

Wir wissen schon, dass wir die Risikoaversion durch einen Wechsel der Wahrscheinlichkeiten erfassen können und dann die Risikoneutralbewertungsformel erhalten:

$$10 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S^1}{1+r}\right) = \frac{1}{1.1}\,(0.4 \cdot 12.5 + 0.6 \cdot 10)$$

Wir rechnen mit pessimistischeren Wahrscheinlichkeiten. Der gute Zustand *wird* unwahrscheinlicher und der schlechte wahrscheinlicher.

Ähnlich funktionieren Zustandspreise. Wenn Risikoneutralität gelten würde, dann hätte bei Zustände den gleichen Wert (Zustandspreis); nämlich $0.\overline{45}$. Im Vergleich zu diesem Benchmark wird der Zustandspreis des guten Zustand herabgesetzt und der des schlechten Zustand herauf.

Ebenfalls ähnlich funktionieren stochastische Diskontfaktoren. Bei Risikoneutralität diskontieren wir mit $1/1.1 = 0.\overline{90}$ und bilden den Erwartungswert mit den empirischen Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} 10.22727 &= 0.5 * (1/1.1) * 12.5 + 0.5 * (1/1.1) * 10 \\ &= 0.5 * 0.\overline{90} * 12.5 + 0.5 * 0.\overline{90} * 10 \end{aligned}$$

Um die Risikoaversion zu erfassen, rechnen wir mit stochastischen Diskontfaktoren

$$10 = 0.5 * 0.\overline{72} * 12.5 + 0.5 * 1.\overline{09} * 10$$

Auch hier wird die Diskontierung zu Ungunsten des guten Zustand *angepasst*.

Auch die vielleicht merkwürdige Formel

$$p_{S^1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S^1}{R^f}\right) + \mathrm{cov}(\mathbf{m}, S^1)$$

kann so leicht interpretiert werden

$$10 = 10.22727 - 0.22727$$

denn $\mathrm{cov}(\mathbf{m}, S^1) = -0.22727$. Die Kovarianz ist negativ und deshalb erhalten wir einen Abschlag (wir müssen etwas vom diskontierten Erwartungswert abziehen). Der Abschlag in Höhe von 0.22727 ergibt sich, weil das Wertpapier in dem Zustand wenig zahlt – nämlich 10 – in dem wir eine Zahlung hoch bewerten (gering diskontieren) – nämlich mit $1.\overline{09}$ sogar aufzinsen.

Auch die Formel

$$p_{S^1} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S^1}{R^f}\right) + \frac{1}{R^f}\lambda_{\mathbf{m}}\beta_{S^1,\mathbf{m}}.$$

wird mit konkreten Werten leicht interpretierbar:

$$10 = 10.22727 + \frac{1}{1.1} \cdot 0.0\overline{36} \cdot (-6.875)$$

denn

$$\lambda_{\mathbf{m}} = \frac{\mathbb{V}(\mathbf{m})}{\mathbb{E}(\mathbf{m})} = 0.0\overline{36}$$
$$\beta_{S^1,\mathbf{m}} = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{m}, S^1)}{\mathbb{V}(\mathbf{m})} = -6.875$$

1.9 Marktpreis des Risikos

$$\frac{\text{Risikoprämie}}{\text{Risiko}}$$

1.10 Darstellungssatz von Riesz für SDFs

Wir betrachten zunächst einige Resultate der linearen Algebra und nutzen diese dann für die Herleitung der finanzwirtschaftlichen/finanzmathematischen Ergebnisse.

Dieser Abschnitt könnte Ihre Geduld strapazieren. Vielleicht schauen Sie sich zuerst das zentrale Ergebnis (1.10.8) an. Sie können dann entscheiden, ob Sie die Hintergründe bzw. Beweise benötigen oder ob Ihnen das Ergebnis in (1.10.8) *reicht*.

1.10.1 Definition: Es sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ heißt **inneres Produkt**, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in V$ gilt:

i.) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **bi-linear**

$$\langle \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle$$

ii.) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist **symmetrisch** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

iii.) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist **positiv definit**. $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in V$ und $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle > 0$ falls $\mathbf{x} \neq 0$.

1.10.2 Bemerkung: i.) Durch $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1,\dots,n} x_i y_i$ ist auf $\mathbb{R}^n$ das sogenannte **Standardskalarprodukt** definiert.

ii.) Gilt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

1.10.3 Satz: Es sei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit Spalten $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^K, i = 1, ..., d$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf $V = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Spann}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_d)$; V ist der von den Spalten von $\mathbf{A}$ aufgespannte Vektorraum.

Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = (\mathbf{x}^\alpha)^T \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle & ... & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_d\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_1\rangle & ... & \langle\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_d\rangle \end{pmatrix} (\mathbf{y}^\alpha)$$

$$= (\mathbf{x}^\alpha)^T \langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle (\mathbf{y}^\alpha),$$

wobei die Einträge von $\mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{R}^d$ die Koeffizienten von $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1^\alpha \mathbf{a}_1 + ... + \mathbf{x}_d^\alpha \mathbf{a}_d$ bezüglich des Erzeugendensystems $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_d\}$ des Vektorraums $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ sind (analog für $\mathbf{y}^\alpha$) und

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle := \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle & ... & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_d\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_1\rangle & ... & \langle\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_d\rangle \end{pmatrix}.$$

1.10.4 Definition: Es sei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit Spalten $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^K, i = 1, ..., d$ und $\langle ., . \rangle$ ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Spann}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_d)$. Wir definieren die $d \times d$ Matrix

die Voraussetzung l.u. ist für später (Invertierbarkeit) notwendig. Die Definition kann man auch ohne die Definition aussprechen.

Gram Matrix? $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ oder $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, wenn Standardskalarprodukt?

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & ... & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_d \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_1 \rangle & ... & \langle \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_d \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

1.10.5 Satz: Es sei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^K, i = 1, ..., d$ und $\langle ., . \rangle$ ein inneres Produkt auf dem d-dimensionalen Vektorraum $V = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Spann}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_d)$. Die $d \times d$ Matrix

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & ... & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_d \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_1 \rangle & ... & \langle \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_d \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

ist invertierbar.

$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$; immer von dieser Form?

Beweis (siehe Hoffmann und Kunze [19, Seite 274 f]): Angenommen $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle$ wäre nicht invertierbar. Dann gibt es $\mathbf{x}^\alpha \neq \mathbf{0}$ mit

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{0}.$$

Dann mit $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^\alpha$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (\mathbf{x}^\alpha)^T \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle (\mathbf{x}^\alpha) = \mathbf{0}$$

Dann muss $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sein, denn $\langle ., . \rangle$ ist gemäß Annahme ein inneres Produkt. Also $\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}^\alpha$, so dass $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{0}$ (denn die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig). Wir erhalten einen Widerspruch.

► Wir benötigen die folgende Variante des **Darstellungssatz von Riesz** (vgl. z.B. Garcia und Horn [11, S. 177]).

oder auch Axler [**?**, Seite 205]

1.10.6 Satz: Es sei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^K, i = 1, ..., d$ und $f : \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung (ein sogenanntes lineares Funktional auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$) und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^K$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{x} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}).$$

In der Tat gilt

Gibt es einen Zusammenhang zur Form (1.6.5)?

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle)^{-1} \begin{pmatrix} f(\mathbf{a}_1) \\ ... \\ f(\mathbf{a}_d) \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle)^{-1} f(\mathbf{A}),$$

wobei wir kompakt

$$f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{a}_1) \\ ... \\ f(\mathbf{a}_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

schreiben.

▶ Das bemerkenswerte ist, dass $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ ist. Wir werden (natürlich) $\mathbf{A}$ als eine Auszahlungsmatrix eines EPFMM auffassen. $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ bedeutet dann, dass $\mathbf{y}$ erreichbar ist. Wir werden sehen, dass das eindeutig bestimmte $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ mit der im Satz genannten Darstellungseigenschaft ein besonders nützliches erreichbares Profil ist.

Wie soll ich mit der ersten Spalte von A umgehen? ..... = $\mathbb{1}$

▶ Wir werden jetzt den Satz von Riesz mit der Bewertung von erreichbaren Profilen in Verbindungen bringen. Wir benötigen dafür noch das folgende Resultat. Es wird ein *neues* Skalarprodukt eingeführt.

1.10.7 Satz: Es sei $\mathbb{P}$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{P}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ für ein endliches $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$. Für Zufallsvariablen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ definieren wir $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{XY})$. Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt.

▶ Wir bezeichnen das Standardskalarprodukt von $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ mit $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1,...,K} x_i y_i$ und verwenden die spitzen Klammern für das oben eingeführte Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{XY}) = \sum_{i=1,...,K} p_i x_i y_i.$$

1.10.8 Satz: Wir betrachten ein arbitragefreies EPFMM mit der Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$. Für alle erreichbare Profile $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ sei $p_{\mathbf{X}}$ der eindeutig bestimmte faire Preis der erreichbaren bedingten Auszahlung $\mathbf{X}$.

i.) Für erreichbare Profile $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ in $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und reelle

Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}} = ap_{\mathbf{X}} + bp_{\mathbf{Y}}.$$

Die Abbildung (der **Bewertungsoperator**) $p_{(\cdot)} : \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \to \mathbb{R}, \mathbf{X} \mapsto p_{\mathbf{X}}$ ist also linear (also ein lineares Funktional auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$).

ii.) Wir betrachten ein arbitragefreies EPFMM mit der Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$. Die Spalten von $\mathbf{A}$ seien zudem linear unabhängig (d.h. $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = N + 1$). Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ mit

Zusammenhang zu (1.6.5)?

$$p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X}).$$

Es gilt in der Tat

..... $\mathbf{x}^*$ sieht wie eine SDF aus ist aber i.A. nicht $\gg 0$, oder?. Gegenbeispiel?

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}(\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle)^{-1} \bar{\mathbf{S}}_0.$$

An dieser Formel kann man direkt ablesen, dass $\mathbf{x}^*$ in $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ liegt.

1.10.9 Bemerkung: Gemäß

$$p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X}).$$

können wir Bewertungsprobleme mit $\mathbf{x}^*$ als $p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X})$ schreiben, d.h. $\mathbf{x}^*$ funktioniert wie ein stochastischer Diskontfaktor. Die Existenz von $\mathbf{x}^*$ ergab sich (schon) aus der Linearität von $p_{(\cdot)}$. Der Satz von Riesz stellt jedoch nicht $\mathbf{x}^* \gg 0$ sicher, so dass $\mathbf{x}^*$ nicht notwendigerweise ein SDF ist. Andernorts heißt ein $\mathbf{x}^*$ mit $p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X})$ schon SDF.

Vgl. auch Back [1, Seite .....].

1.10.10 Bemerkung: Es gibt einen engen Zusammenhang zu Projektionen (vgl. z.B. Back [1, Seite .....]). Wir betrachten dafür Zustandspreise, da dieser Fall besonders transparent ist. Wenn Arbitragefreiheit gilt, dann gibt es Zustandspreise $\boldsymbol{\psi} \gg 0$ mit

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = \bar{\mathbf{S}}_0$$

Wie oben leitet man eine Riesz Darstellung $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}^* = \bar{\mathbf{S}}_0, \boldsymbol{\psi}^* \in \mathrm{Col}(A)$ mit Vektor $\boldsymbol{\psi}^* = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{S}}_0$ ab. Wir beobachten dann:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^* &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{S}}_0 \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\psi} \\
&= \mathbf{P}_{\mathrm{Col}(\mathbf{A})}\boldsymbol{\psi}
\end{aligned}$$

Also ist $\boldsymbol{\psi}^*$ die Projektion von $\boldsymbol{\psi}$ auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$; vgl. Meyer [33, Seite 430].

Wenn man Zustandspreise hat, dann kann man so leicht $\boldsymbol{\psi}^*$ bestimmen. Der Satz von Riesz liefert $\boldsymbol{\psi}^*$ direkt gemäß $\boldsymbol{\psi}^* = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{S}}_0$

Trotzdem ist es gut zu wissen, dass $\boldsymbol{\psi}^*$ die Projektion von $\boldsymbol{\psi}$. Vgl. dazu Back [1, Seite .....] und Cochrane [5, Seite .....].

1.10.11 Beispiel: Siehe R Code b zu unvollständigen Märkten.

1.11 σ-minimale Zahlungsprofile

In wohl jedem Buch über Finanzwirtschaft (mathematisch oder nicht) werden μ-σ-optimale Anlageformen erläutert. Die originären Arbeiten stammen von Markowitz (vgl. [31] und [32]). Wir werden bestimmte Aspekte dieser Analyse jetzt in *für uns passender Form* behandeln; nämlich mit für die Bewertung relevanten Aspekte. Das Thema greifen wir später nochmal in der klassischen Form auf.

Es wird sich zeigen, dass wir sehr weitreichende Resultate erhalten, die zudem unsere Intuition schärfen. Dieser Abschnitt orientiert sich an Skiadas [46, Kapitel 1 und 2].

1.11.1 Definition: Ein Zahlungsprofil $\mathbf{X}^*$ heißt σ-**minimal**, wenn

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X}} \{\mathbb{V}(\mathbf{X}) \,|\, p_{\mathbf{X}} = p_{\mathbf{X}^*} \text{ und } \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}^*)\}.$$

Also: Jedes andere im Vergleich zu $\mathbf{X}^*$ gleich teure Zahlungsprofil $\mathbf{X}$ mit der gleichen erwarteten Auszahlung hat eine mindestens so hohe Varianz wie $\mathbf{X}^*$.

1.11.2 Bemerkung: Das EPFMM sei arbitragefrei und die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ habe vollen Spaltenrang (die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig). Es sei zudem $\mathbb{1} \in$

$\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ das gemäß Satz 1.10.8 eindeutig bestimmte Profil mit $p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.[14]

Dann beobachten wir

$$Z = p_{\mathbb{1}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*\mathbb{1}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*).$$

Also

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{R^f},$$

wobei wir einerseits die Notation $Z = p_{\mathbb{1}}$ einführen und andererseits beachten, dass R^f die Bruttoverzinsung der sicheren Anlageform bezeichnet.

1.11.3 Bemerkung: i.) Das EPFMM sei arbitragefrei und die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ habe vollen Spaltenrang (die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig). Es sei zudem $\mathbb{1} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{x}^*$ das gemäß Satz 1.10.8 eindeutig bestimmte Profil mit $p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*\mathbf{X})$.

Wenn die Vektoren $\mathbf{x}^*$ und $\mathbb{1}$ linear **abhängig** sind, dann gilt für alle $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}(\mathbf{x}^*\mathbf{X}) = Z\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{R^f}\mathbb{E}(\mathbf{X}).$$

Also haben alle erreichbaren Wertpapiere die erwartete Rendite R^f. Das wäre ein sehr langweiliges/**triviales** Finanz-

[14] Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Anleger Zugang zu einer risikolosen Anlageform haben.

marktmodell.

ii.) Wenn die Vektoren $\mathbb{1}$ und $\mathbf{x}^*$ linear unabhängig sind, dann gilt

$$Z^2 \neq p_{\mathbf{x}^*}.$$

1.11.4 Satz: Die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ eines arbitragefreien EPFMM sei vom Rang $d = N + 1$ (so dass die Spalten linear unabhängig sind[15]). Auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ betrachten wir das innere Produkt $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{XY})$. Es sei $\mathbb{1} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ das gemäß des Satzes von Riesz 1.10.6 eindeutig bestimmte Profil mit der Eigenschaft

$$p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X}).$$

für alle $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Zudem seien $\mathbb{1}$ und $\mathbf{x}^*$ linear unabhängig.

Dann gilt: Ein Zahlungsprofil $\mathbf{X}^* \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ ist genau dann σ-minimal, wenn es Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{X}^* = a\,\mathbb{1} + b\,\mathbf{x}^*$$
$$\text{als ZV: } \mathbf{X}^* = a + b\,\mathbf{x}^*$$

gibt.

1.11.5 Bemerkung: Die beiden linear unabhängigen Vektoren $\mathbb{1}$ und $\mathbf{x}^*$ spannen alle σ-minimalen erreichbaren Pro-

[15] Keines der Finanzprodukte ist redundant.

file auf. Die Menge der σ-minimalen Profile bilden also einen 2-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^K$.

Die Profile der Form $a\mathbb{1}$ haben die **Varianz Null**. Diese Profile sind also von **global** minimaler Varianz. Der faire Preis ist $p_{a\mathbb{1}} = aZ$ und die Bruttorendite ist R^f.

Man kann von R^f nach oben abweichende erwartete Renditen erzielen, wenn man $b\,\mathbf{x}^*$ zu $a\mathbb{1}$ addiert. Man erhält eine höhere erwartete Rendite und eine höhere Varianz. Dies geschieht dann auf **σ-minimale Weise**.

1.11.6 Bemerkung: Für den etwaigen späteren Gebrauch notieren wir noch die folgende Beobachtung. Die Menge der σ-minimalen Profile bilden einen 2-dimensionalen Unterraum. Man kann demnach auch **zwei andere** linear unabhängige σ-minimale Profile als Basis des Raums der σ-minimalen Profile wählen. .....

▶ Das folgende Lemma benötigen wir in einem Beweis des nächsten Abschnitts. Für sich betrachtet ist es *technisch.*

1.11.7 Lemma: Die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ eines arbitragefreien EPFMM sei vom Rang $d = N{+}1$ (so dass die Spalten linear unabhängig sind). Auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ betrachten wir das innere Produkt $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}\mathbf{Y})$. Es sei $\mathbb{1} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ das gemäß des Satzes von Riesz 1.10.6

eindeutig bestimmte Profil mit der Eigenschaft

$$p_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{X} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X})$$

für alle $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Zudem seien $\mathbb{1}$ und $\mathbf{x}^*$ linear unabhängig.

$\mathbf{X}^*$ ist genau dann ein σ-minimales und nicht-konstantes Profil, wenn es einen Skalar $b \neq 0$ gibt, so dass für alle $\mathbf{X}$

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\frac{\mathbf{X}}{R_1^f} \right) + b \operatorname{cov}(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$$

gilt.

1.11.8 Bemerkung: Im Beweis oben fällt δ und damit die Koeffizienten α, β von $\mathbf{X}^* = \alpha \mathbf{x}^* + \beta \mathbb{1}$ vom Himmel. Wir wollen uns überlegen, wie man die Koeffizienten finden kann.

Wir beobachten zwei Wege die faire Preis $p_{\mathbf{X}}$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^* \mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{x}^*) \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}) + \operatorname{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) \\
&= \frac{1}{R^f} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{X}) + \operatorname{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{\mathbf{X}}{R^f} \right) + \operatorname{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X})
\end{aligned}$$

und

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(\frac{\mathbf{X}}{R^f} \right) + b \operatorname{cov}(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$$

Dann beobachten wir weiter

$$\begin{aligned} & b\,\mathrm{cov}(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) \\ \Leftrightarrow\ & b\,\mathrm{cov}(\alpha\mathbf{x}^* + \beta\mathbb{1}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) \\ \Leftrightarrow\ & b\,\mathrm{cov}(\alpha\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}) \end{aligned}$$

Also $\alpha = \frac{1}{b}$.

Also

$$\mathbf{X}^* = \frac{1}{b}\mathbf{x}^* + \beta\mathbb{1}.$$

Wir müssen noch β bestimmen. Das geht noch einfacher:

Kann man mit dem Argument aus dieser Bemerkung den Beweis übersichtlicher machen?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{X}^*) &= \frac{1}{b}\frac{1}{R^f} + \beta \\ \Rightarrow \beta &= \mathbb{E}(\mathbf{X}^*) - \frac{1}{b}\frac{1}{R^f} \end{aligned}$$

1.11.9 Take away: Wir betrachten ein arbitragefreies EPFMM mit Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$. Die Spalten von $\mathbf{A}$ seien linear unabhängig und es gelte $\mathbb{1} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Wir betrachten das innere Produkt $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{XY})$ auf $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Ferner sei $\mathbf{x}^*$ das eindeutig bestimmte Profilt mit

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}(\mathbf{x}^*\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) + \mathrm{cov}(\mathbf{x}^*, \mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}).$$

Die Menge der varianzminimalen Portfolio bilden einen zwei dimensionalen Unterraum vom $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ mit der Basis

Liefert $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{S}}_0$ Kandidaten für Zustandspreise?

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}(\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle)^{-1}\bar{\mathbf{S}}_0 \text{ und } \mathbb{1}.$$

1.12 Risiko und Rendite

Es ist ein Gemeinplatz, dass eine höhere erwartete Rendite und ein höheres Risiko zusammen gehören. Diese (so noch ungenaue) Aussage wird in diesem Abschnitt genauer betrachten und in einen zentralen Zusammenhang zum stochastischen Diskontfaktor gebracht. Wir erhalten eine berühmte β-Darstellung für die erwartete Rendite.

Diese β-Darstellung dokumentiert eine sehr wichtige Beobachtung. Es ist unzutreffend, dass eine höhere Varianz eines Wertpapier per se mit einer höheren erwarteten Rendite einher geht. Vielmehr geht ein höheres β mit einer höheren Renditen einher.

Alle Renditen in der $\mathbb{Q}$-Welt sind r^f.

1.12.1 Definition (Renditen): Es sei $p_{\mathbf{X}} > 0$. Dann definieren wir die Renditen:

Bruttorendite

$$\mathbf{R}^{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{p_{\mathbf{X}}}$$

und **Rendite**

$$\mathbf{r}^{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X} - p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} = \frac{\mathbf{X}}{p_{\mathbf{X}}} - 1$$

Renditen entsprechen Zahlungsprofilen mit Preis 1.

1.12.2 Bemerkung: Es sei $\mathbf{m}$ ein stochastischer Diskontfaktor und $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{X}}{p_{\mathbf{X}}}$ eine **Bruttorendite**.

i.) Es gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})} - \beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}\lambda_{\mathbf{m}},$$

wobei

$$\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}} := \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},\mathbf{m})}{\mathbb{V}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})},$$
$$\lambda_{\mathbf{m}} := \frac{\mathbb{V}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})}.$$

ii.) Wir betrachten die risikolose Anlageform mit konstanter Rendite R^f. Dann gilt natürlich $\operatorname{cov}(\mathbf{m}, R^f) = 0$. Dann folgt $R^f = \frac{1}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})}$ (das haben wir schon mal hergeleitet). Also gilt[16]

Andere Autoren (Campbell, Cochrane) verwenden bei $\lambda_{\mathbf{m}}$ ein anderes Vorzeichen. Warum?

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R}) = R^f - \beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}\lambda_{\mathbf{m}}.$$

$\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}$ misst das **bewerte** *Risiko* des Wertpapiers. Das bewertete Risiko entsprecht der skalierten Kovarianz zum stochastischen Diskontfaktor $\frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},\mathbf{m})}{\mathbb{V}^{\mathbb{P}}(\mathbf{m})}$. $\lambda_{\mathbf{m}}$ heißt **Marktpreis des Risikos**.

Die erwartete Wertpapierrendite $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R})$ setzt sich aus drei Teilen zusammen. Eine *Zeitwertvergütung* R^f und eine Ri-

[16]Gilt $\operatorname{cov}(\mathbf{m},\mathbf{R}) > 0$ bzw. äquivalent $\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}} > 0$, dann erzeugt $\mathbf{R}$ einen Hedgingeffekt. Der Preis des Finanzprodukt ist relativ hoch und die erwartete Rendite relativ niedrig.

sikovergütung $\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}\lambda_{\mathbf{m}}$, wobei die Risikovergütung aus zwei Komponenten besteht: Aus dem Preis des Risikos $\lambda_{\mathbf{m}}$ und dem Risiko gemessen durch $\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}$. Bemerkenswert ist, dass das Risiko nicht allein von der Verteilung der Rendite $\mathbf{R}$ (oder die Varianz von $\mathbf{R}$) abhängig ist, sondern die Kovarianz zum stochastischen Diskontfaktor entscheidend ist. Für die Risikoprämie ist also nicht das *isoliert betrachtete* Risiko $\mathbb{V}(\mathbf{R})$ relevant, sondern das bewertete Risiko $\mathrm{cov}(\mathbf{R}, \mathbf{m})$.

iii.) Wir bemerken noch, dass $\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}$ ein Regressionskoeffizient ist.[17]

iv.) Die Wertpapierrendite definieren wir durch $\mathbf{r} = \mathbf{R} - 1 = \frac{\mathbf{S}_1 - S_0}{S_0}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}) - r^f = (-\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}) \cdot \lambda_{\mathbf{m}}$$

v.) Wir hatten schon bemerkt, dass $\beta_{\mathbf{R},\mathbf{m}}$ ein Regressionskoeffizient ist. Das ist großartig, da es zur statistischen Analyse einlädt. Allerdings ist zunächst nicht klar, wie wir diese Beobachtung in einer empirische Regressionsanalyse umsetzen sollen. Dazu benötigten wir Daten für $\mathbf{m}$, die wir typischerweise nicht direkt haben. Hier hilft der nächste Satz, der das Hauptresultat dieses Abschnitt ist.

1.12.3 Satz: Wenn $\mathbf{X}^*$ ein σ-minimales nicht konstantes

[17] Siehe Hansen [13, Seite 42].

Profil ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R}) - R_1^f &= \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{R},\mathbf{R}^*)}{\mathbb{V}(\mathbf{R}^*)}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R}^*) - R_1^f\right)\\ &= \beta_{\mathbf{R},\mathbf{R}^*}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{R}^*) - R_1^f\right)\end{aligned}$$

► $\beta_{\mathbf{R}^{\mathbf{X}},\mathbf{R}^{\mathbf{X}^*}}$ erfasst das **bewertungsrelevante Risiko** und $\mathbf{R}^{\mathbf{X}^*} - R_1^f$ den **Preis des Risikos**.

1.12.4 Bemerkung: Es gibt also genau dann eine β Repräsentation, wenn die Rendite bezüglich derer die Repräsentation gebildet wird, σ-minimal ist. Im CAPM ist $\mathbf{X}^*$ das Marktprofil und $\mathbf{R}^{\mathbf{X}^*}$ die Marktrendite. Das CAPM gilt also, wenn das Marktprofil σ-minimal ist.

2 Mehrperiodenmodell

In diesem Kapitel werden **dynamische** Modelle entwickelt. Während im vorhergehenden Kapitel lediglich eine Periode betrachtet wurde, ist die Zahl der Perioden in diesem Abschnitt eine beliebige natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$. Dadurch können wir zwei wichtige Aspekte des Finanzmarktes erfassen: (1) **Information** und (2) **Strategie**.

► Einschlägige Quellen zu Binomialbaummodellen sind Shreve [44], Jarrow und Chatterjea [27], Jarrow und Turnbull [26], Hull [14] und natürlich die originäre Quelle Cox, Ross & Rubinstein [6]. Über das Thema der Implementierung kann man sich insbesondere bei Seydel (2017) [43, Abschnitt 1.4] und Röman (2017) [39, Kapitel 2] informieren.

2.1 Binomialbaummodell

2.1.1 Ein-Perdioden-Modell

2.1.1 Definition (Einperiodenbinomialbaummodell):
Das Einperiodenbinomialbaummodell (**EPBBM**) ist durch

die folgenden Angaben beschrieben:

- Anleger haben Zugang zu einer risikolosen Anlageform mit Zinssatz $r > -1$. Wir stellen uns diese Anlagemöglichkeit als **Geldmarktkonto** vor. Diese Anlageform könnte auch die Anlage in nicht durch Zahlungsausfall bedrohte Anleihen mit einer Restlaufzeit von einer Zeiteinheit sein. Den **Betrag in Geldeinheiten** (GE), der auf dem Geldmarktkonto angelegt wird, bezeichnen wir mit $M_1 \in \mathbb{R}$ (M für Money).

- In $t = 1$ tritt einer von zwei Zuständen ein: $\Omega = \{\omega_H, \omega_T\}$. Es gilt $0 < \mathbb{P}(\{\omega_H\}) = p < 1$. p heißt Erfolgswahrscheinlichkeit und H bzw. T steht für hoch respektive tief. Wir wählen als σ-Algebra die Potenzmenge $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Das Risiko wird durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ erfasst.

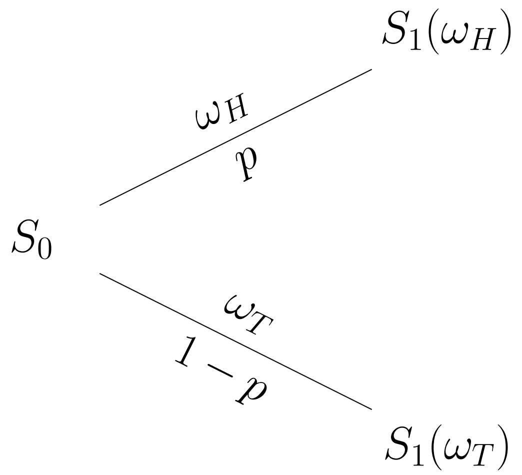
- Anleger können in ein riskantes Wertpapier investieren, das in $t = 0$ für $S_0 > 0$ gehandelt wird und für dessen $t = 1$ Preis

  $$\begin{aligned} 0 < S_1(\omega_H) &= uS_0 \qquad \text{bzw.} \\ 0 < S_1(\omega_T) &= dS_0 \end{aligned}$$

  gilt. Ferner unterstellen wir $0 < d < u$.

  d steht für down und u für up. Wir setzen nicht notwendigerweise $d < 1$ bzw. $u > 1$ voraus, so dass „down“ bzw. „up“ strenggenommen missverständlich ist. Für die **Anzahl der gekauften Wertpapiere** verwenden wir Δ_1.

Schematische Darstellung des EPBBM



2.1.2 Definition: Eine Anlagestrategie $\mathbf{h} = (M_1, \Delta_1)^T$ des EPBBM heißt **Arbitrage**, wenn[1]

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = M_1 + \Delta_1 S_0 = 0$, d.h. die Anschaffungskosten $V_0^{\mathbf{h}}$ der Anlagestrategie $(M_1, \Delta_1)^T$ betragen 0.

ii.) $V_1^{\mathbf{h}} = M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) \geq 0$ für $\omega = \{\omega_H, \omega_T\}$ und

iii.) $V_1^{\mathbf{h}} = M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) > 0$ für $\omega = \omega_H$ oder für $\omega = \omega_T$.

Das EPBBM heißt **arbitragefrei**, wenn es keine Arbitrage gibt.

[1]Die (Zeit-)Indizes von M und Δ sind zunächst merkwürdig, denn über diese Werte wird doch in 0 entschieden!? Wir wählen die Indizes bei **Handelsstrategie** mit einer zeitlichen *Verschiebung*, da wir dann später bequem das Konzept **predictable** einführen können. Die Variablen M_1 und Δ_1 beziehen sich auf den Zeit**raum** von 0 bis 1 (Halteperiode).

2.1.3 Bemerkung: Gilt Arbitragefreiheit und ist $M_1 + \Delta_1 S_0 = 0$, dann gilt $M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) = 0$ für $\omega = \omega_H, \omega_T$ oder mindestens einer der Werte $M_1(1+r)+\Delta_1 S_1(\omega)$ ist negativ.

In der Tat: Angenommen $M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) \neq 0$. Wäre $M_1(1+r)+\Delta_1 S_1(\omega) \geq 0$ für beide ω, dann wäre $(M_1, \Delta_1)^T$ eine Arbitrage. $M_1(1+r)+\Delta_1 S_1(\omega) \leq 0$ kann aber ebenfalls nicht gelten, dann das wäre $(-M_1, -\Delta_1)^T$ eine Arbitrage. Also muss es ein ω mit $M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) < 0$ und ein ω mit $M_1(1+r) + \Delta_1 S_1(\omega) > 0$ gelten.

2.1.4 Bemerkung: Wie für den Fall des EPFMM ist es auch hier zweckmäßig, die Auszahlungsmatrix der Ausgangsanlagemöglichkeiten zu definieren:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+r & S_1(\omega_H) \\ 1+r & S_1(\omega_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & uS_0 \\ 1+r & dS_0 \end{pmatrix}.$$

In der ersten Zeile stehen die Auszahlungen für $\omega = \omega_H$ und in der zweiten Zeile stehen die Auszahlungen für $\omega = \omega_T$. Die Matrix hat wegen $d < u$ den Rang 2 und ist somit invertierbar. Die Auszahlung eines Portfolio $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{h}_1 = (M_1, \Delta_1)^T$ ist $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}_1} = \mathbf{A}\mathbf{h}_1$. Da die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist, kann jedes 2-dimensionale Auszahlungsprofil $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{h}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$ eindeutig repliziert werden.

2.1.5 Satz: Das EPBBM ist (wegen $d \neq u$) vollständig. Es gilt sogar folgendes: Für jedes Auszahlungsprofil

$V_1 = (V_1(\omega_H), V_1(\omega_T))^T$ existiert eine **eindeutig** bestimmte **Replikationsstrategie** $\mathbf{h}_1 = (M_1, \Delta_1)^T$.

2.1.6 Satz: Im EPBBM gilt genau dann Arbitragefreiheit, wenn $d < 1 + r < u$ gilt.[2]

2.1.7 Bemerkung: Die Intuition für den letzten Satz liegt auf der Hand. Wäre beispielsweise $1 + r \leq d < u$, dann ist die Geldleihe so günstig, dass ein Investor selbst für $\omega = \omega_T$ in der Lage ist, aus dem Kursgewinn der riskanten Anlage, etwaige Schulden zu tilgen. Unter solchen Umständen kann ein Investor mit geliehenen Geld Wertpapiere kaufen und einen sicheren nicht-negativen von Null verschiedenen Gewinn realisieren.

2.1.8 Definiton: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

i.) $q := \mathbb{Q}(\{\omega_H\}) > 0, \mathbb{Q}(\{\omega_T\}) > 0$,

ii.) Der aktuelle Preis des Basiswertpapiers ergibt sich gemäß **Risikoneutralbewertungsprinzip**:

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1}{1+r}\right).$$

2.1.9 Satz: Im EPBBM mit $d < 1 + r < u$ ist **das** Risi-

[2]Beachte, dass die Ungleichung $d > 0$ als Generalvoraussetzung weiter gelten soll.

koneutralwahrscheinlichkeitsmaß durch

$$\mathbb{Q}(\{H\}) = q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

gegeben.

2.1.10 Bemerkung: Wir notieren die folgenden Äquivalenzen:

$$0 < q < 1 \Leftrightarrow 0 < d < 1+r < u \Leftrightarrow \text{ Arbitragefreiheit.}$$

2.1.11 Bemerkung: Wenn man die Geldmarktverzinsung anstatt in der Form $1+r$ in der Form e^r angibt, dann ist die Risikoneutralwahrscheinlichkeit gleich

$$q = \frac{e^r - d}{u-d}.$$

2.1.12 Bemerkung (Bewertung durch Replikation): Da ein arbitragefreies EPBBM vollständig ist, können wir ein beliebiges Zahlungsprofil $\mathbf{V}_1 = (V_1(\omega_H), V_1(\omega_T))^T$ auch mittels Replikation bewerten. Dazu ermitteln wir die replizierende Strategie. Die Anschaffungskosten der replizierenden Strategie entsprechen dann dem fairen Preis.

2.1.13 Satz (Risikoneutralbewertungsprinzip): Gegeben sei ein arbitragefreies EPBBM mit $0 < d < 1+r < u$ und ein beliebiges Zahlungsprofil $\mathbf{V}_1 = (V_1(\omega_H), V_1(\omega_T))^T$.

In $t = 0$ ist der faire Preis dieses Zahlungsprofils

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r}(qV_1(\omega_H) + (1-q)V_1(\omega_T)) \\ &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_1). \end{aligned}$$

Für alle Zahlungsprofile gilt demnach das **Risikoneutralbewertungsprinzip**.

2.1.14 Bemerkung: Wir erhalten also das bemerkenswerte – und uns schon geläufige – Resultat, dass die Anschaffungskosten des replizierenden Portfolios dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlung entsprechen, wobei die Diskontierung mit dem risikolosen Zins vorgenommen und der Erwartungswert mit der Risikoneutralwahrscheinlichkeit berechnet wird. Wir bemerken also: **Das Risikoneutralbewertungsprinzip – das gemäß Definition für die Basiswerte gilt – überträgt sich auf alle Anlagestrategien. Wegen der Vollständigkeit überträgt sich das Risikoneutralbewertungsprinzip (sogar) auf alle bedingten Auszahlungen.**

► Das EPBBM ist eine andere Formulierung des EPFMM mit $K = 2$. Das EPBBM wurde erläutert, weil dann die Notation des Binomialbaummodells mit N Perioden leichter erfasst werden kann. ► Das EPBMM repräsentiert einen Zweig des Binomialbaums .....

N ist vorne die Anzahl der riskanten WP ......

2.1.2 Binomialbaummodell: 2 Perdioden dann n_T Perdioden

2.1.15 Definition: Das **Zweiperiodenbinomialbaummodell (ZPBBM)** ist durch die folgenden Angaben beschrieben:

- Es gibt zwei Perioden und drei Zeitpunkte $t = 0, 1, 2$ ($\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$).
- Anleger können für den Zinssatz $r > -1$ Geld sicher anlegen bzw. Kredite aufnehmen. Dieser Zinssatz ist in beiden Perioden gleich r.
- Das Risiko wird durch den folgenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ erfasst:

  $$\begin{aligned} \Omega_2 &= \{(\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_1, \omega_2 \in \{\omega_H, \omega_T\}\} \\ &= \Omega_1 \times \Omega_1, \Omega_1 = \{\omega_H, \omega_T\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega_2), \end{aligned}$$

  und

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(\omega_H, \omega_H)\}) &= p^2, \\ \mathbb{P}(\{(\omega_H, \omega_T)\}) &= \mathbb{P}(\{(\omega_T, \omega_H)\}) = p(1-p), \\ \mathbb{P}(\{(\omega_T, \omega_T)\}) &= (1-p)^2 \end{aligned}$$

  Für das ZPBBM ist der Wahrscheinlichkeitsraum der 2-fache Produktwahrscheinlichkeitsraum von $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$, wobei $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ der Wahrscheinlichkeitsraum des EPBMM ist. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist also ein unabhängig wiederholtes Bernoulliexperiment mit 2 Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit p.

- Anleger können in ein riskantes Wertpapier investieren, das in $t = 0$ für $S_0 > 0$ gehandelt wird. Der Preis des Wertpapiers in $t = 1$ ist die Zufallsvariable $S_1 = S_1(\omega_1, \omega_2)$ mit[3]

$$S_1(\omega_T) = S_1(\omega_T, \omega_2) = dS_0, \omega_2 \in \{\omega_H, \omega_T\}$$
$$S_1(\omega_H) = S_1(\omega_H, \omega_2) = uS_0, \omega_2 \in \{\omega_H, \omega_T\}$$

Der Kurs in $t = 1$ ist entweder $S_1(\omega_H) = uS_0$ oder $S_1(\omega_T) = dS_0$; bei S_1 lassen wir die für den Wert von S_1 *irrelevante* zweite Dimension gelegentlich weg. Dass der Kurs in t nicht vom Wert von ω_2 abhängig ist, ist selbstverständlich: Der Kurs in $t = 1$ nimmt naturgemäß keine Zustände der nächsten Periode vorweg; die sind noch nicht eingetreten.

In $t = 2$ ist der Preis des Wertpapiers die Zufallsva-

[3]Beachte, dass formal $S_1(\omega_T)$ und $S_1(\omega_H)$ nicht definiert sind, denn die Zufallsvariable S_1 ist gemäß Definition einer Zufallsvariable von zwei Argumenten abhängig. S_1 hängt aber nicht dabei ab, welchen Wert ω_2 annimmt. Deshalb ist es üblich, ω_2 wegzulassen.

riable $S_2 = S_2(\omega_1, \omega_2)$ mit

$$\begin{aligned} S_2(\omega_H, \omega_H) &= u^2 S_0 \\ S_2(\omega_H, \omega_T) &= S_2(\omega_T, \omega_H) = udS_0 \\ S_2(\omega_T, \omega_T) &= d^2 S_0 \end{aligned}$$

Ferner nehmen wir an, dass $0 < d < u$ gilt.

- Anleger können ihr Portfolio nicht nur in $t = 0$ wählen, sondern zudem in $t = 1$ **anpassen**; und zwar je nach **Information** über die Kursentwicklung. Mit $(M_1, \Delta_1)^T \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir das $t = 0$ Portfolio. Anleger beobachten die Preisentwicklung des Wertpapiers. Sie können dementsprechend ihr $t = 1$ Portfolio in Abhängigkeit der ersten Dimension ω_1 von $(\omega_1, \omega_2)^T$ wählen; ω_2 kennen die Anleger noch nicht! Für den Fall, dass der Preis zunächst steigt – also $\omega_1 = \omega_H$ ist –, verwenden wir die Notation $(M_2(\omega_H), \Delta_2(\omega_H))^T$; und $(M_2(\omega_T), \Delta_2(\omega_T))^T$ wenn der Preis zunächst fällt. Die drei Vektoren (6 Zahlen)

$$(M_1, \Delta_1)^T, (M_2(\omega_H), \Delta_2(\omega_H))^T, (M_2(\omega_T), \Delta_2(\omega_T))^T$$

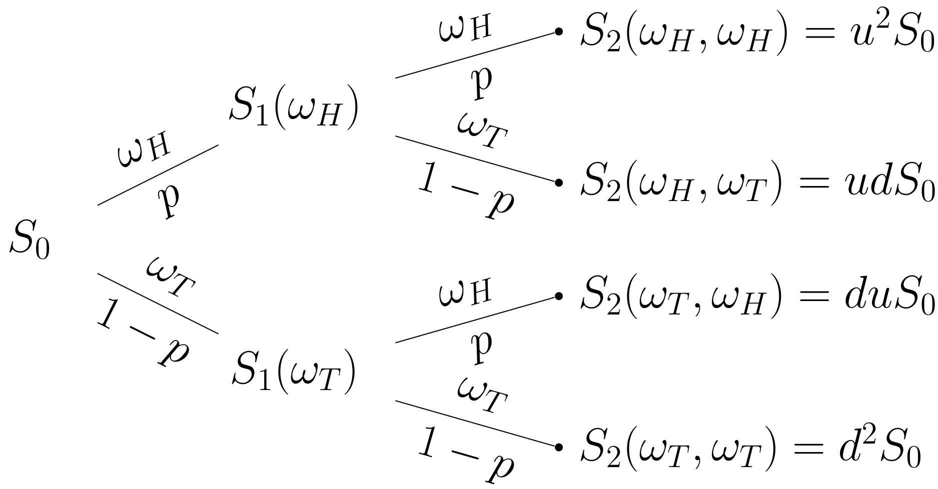
heißen **Anlagestrategie**.

Der Wert $V_0 = \Delta_1 S_0 + M_1$ erfasst die **Anfangskosten bzw. Anschaffungskosten bzw. Anfangswert** der Strategie – die in $t = 0$ anfallen. $V_2(\omega_1, \omega_2) = (1+r)M_2(\omega_1) + \Delta_2(\omega_1)S_2(\omega_1, \omega_2)$ erfasst die **Auszah-**

lungen der Strategie, die sich in $t = 2$ ergeben.

- Das folgende Diagramm zeigt die

Schematische Darstellung des ZPBBM



2.1.16 Definiton: Eine Anlagestrategie des ZPBBM

$$(M_1, \Delta_1)^T, (M_2(\omega_H), \Delta_2(\omega_H))^T, (M_2(\omega_T), \Delta_2(\omega_T))^T$$

heißt **selbstfinanzierend**, wenn für alle $\omega \in \{\omega_H, \omega_T\}$

$$M_1 \cdot (1 + r) + \Delta_1 \cdot S_1(\omega) = M_2(\omega) + \Delta_2(\omega) \cdot S_1(\omega)$$

gilt.

$M_1 \cdot (1 + r) + \Delta_1 \cdot S_1(\omega)$ ist der Wert in $t = 1$ des in $t = 0$ angeschafften Portfolios und $M_2(\omega) + \Delta_2(\omega) \cdot S_1(\omega)$ sind die Kosten/Wert des Portfolio, wie es in $t = 1$ angeschafft wird. In $t = 1$ wird demnach weder Geld entnommen noch muss Geld ergänzt werden. Die Umschichtung von M_1, Δ_1 auf M_2, Δ_2 finanziert sich (in diesen Sinn) selbst.

2.1.17 Definiton: Das ZPBBM heißt **arbitragefrei**, wenn es keine selbstfinanzierende Anlagestrategie mit Anschaffungskosten $V_0 = 0$ gibt, so dass die Auszahlung $0 \neq V_2 \geq 0$ nicht-negativ aber von Null verschieden ist.

2.1.18 Bemerkung: Wenn es eine Anlagestrategie mit $V_0 = 0$ und $0 \neq V_1 \geq 0$ gibt, dann gibt es eine Arbitragemöglichkeit.

▶ Wie schon vorher wollen wir für den Fall der Arbitragefreiheit Risikoneutralwahrscheinlichkeiten zur Bewertung nutzen. Wir haben die $\mathbb{P}$-Welt als zweifache Wiederholung eines unabhängigen Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p modelliert. Um in die $\mathbb{Q}$-Welt zu gelangen, müssen wir nur die Erfolgswahrscheinlichkeit geeignet wählen/finden.

2.1.19 Definiton: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega^2, \mathcal{P}(\Omega^2))$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß** des ZPBBM, wenn

i.) $\mathbb{Q}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß der zweifachen unabhängigen Wiederholung des Bernoulli Experiments mit Ergebnisse $\Omega = \{\omega_H, \omega_T\}$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $q > 0$.

ii.) Es gilt

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1}{1+r}\right) = q\,\frac{S_1(\omega_H)}{1+r} + (1-q)\,\frac{S_1(\omega_T)}{1+r}.$$

und

$$\begin{aligned}
S_1(\omega_H) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_H) \\
&= \mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_H|\omega_1 = \omega_H)\frac{S_2(\omega_H,\omega_H)}{1+r} \\
&+ \mathbb{Q}(\omega_2 = T|\omega_1 = \omega_H)\frac{S_2(\omega_H,\omega_T)}{1+r} \\
&= q\frac{S_2(\omega_H,\omega_H)}{1+r} + (1-q)\frac{S_2(\omega_H,\omega_T)}{1+r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1(T) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_T) \\
&= \mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_H|\omega_1 = \omega_T)\frac{S_2(\omega_T,\omega_H)}{1+r} \\
&+ \mathbb{Q}(\omega_2 = T|\omega_1 = \omega_T)\frac{S_2(\omega_T,\omega_T)}{1+r} \\
&= q\frac{S_2(\omega_T,\omega_H)}{1+r} + (1-q)\frac{S_2(\omega_T,\omega_T)}{1+r}, \\
&= \frac{qS_2(\omega_T,\omega_H) + (1-q)S_2(\omega_T,\omega_H)}{1+r}
\end{aligned}$$

wobei wir wegen der unterstellten Unabhängigkeit $\mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_H|\omega_1 = \omega_T) = \mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_H|\omega_1 = \omega_H) = q$ und $\mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_T|\omega_1 = \omega_T) = \mathbb{Q}(\omega_2 = \omega_T|\omega_1 = \omega_H) = 1-q$ verwenden können.

Wir beachten, dass $S_1(H)$ i.A. nicht gleich $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)$ ist; sondern gleich $\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_H)$. Wir bilden keinen (unbedingten) Erwartungswert $\mathbb{E}$, sondern einen bedingten $\mathbb{E}_1$! Ein bedingter Erwartungswert ist nicht einfach eine Zahl, sondern eine Zufallsvariable: $\mathbb{E}_1$ hängt von ω ab!

2.1.20 Bemerkung: In der obigen Definitionen folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} S_1(\omega_H) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_H) \\ S_1(\omega_T) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_T) \end{aligned}$$

für $S_1(\omega_H)$ und $S_1(\omega_T)$ für den Zeitpunkt 1 aus der Gleichung für S_0.

In der Tat: Aus

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1}{1+r}\right) = q\,\frac{uS_0}{1+r} + (1-q)\,\frac{dS_0}{1+r}.$$

folgt

$$\begin{aligned} S_1(H) = uS_0 &= q\,\frac{u^2S_0}{1+r} + (1-q)\,\frac{udS_0}{1+r} \\ &= q\frac{S_2(\omega_H,\omega_H)}{1+r} + (1-q)\frac{S_2(\omega_H,\omega_T)}{1+r} \\ &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_H) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
S_1(T) = dS_0 &= q\,\frac{duS_0}{1+r} + (1-q)\,\frac{d^2S_0}{1+r} \\
&= q\frac{S_2(\omega_T,\omega_H)}{1+r} + (1-q)\frac{S_2(\omega_T,\omega_T)}{1+r} \\
&= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_T)
\end{aligned}$$

Man könnte sie also auch weglassen. In anderen Modellen benötigt man in der Definition entsprechende Gleichungen wie

$$\begin{aligned}
S_1(\omega_H) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_H) \\
S_1(\omega_T) &= \mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\right)(\omega_T)
\end{aligned}$$

für jede Periode; deshalb haben wir die Gleichungen angegeben.

2.1.21 Satz: Wenn $d < 1+r < u$ gilt, dann ist der durch das ZPBBM modellierte Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig. Das Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ergibt sich, wenn man (wie im EPBBM) die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

wählt.

Jedes Profil $V_2 = V_2(\omega_1, \omega_2)$ können wir gemäß des Risikoneutralbewertungsprinzips bewerten:

$$p_{V_2} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_2}{(1+r)^2}\right)$$

bzw.

$$\begin{aligned} p_{V_2} = V_0 &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_1)}{1+r}, \\ V_1 &= \frac{\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}(V_2)}{1+r} \end{aligned}$$

wobei wir beachten müssen, dass V_1 bzw. $\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}$ Zufallsvariablen sind (denn die bedingte Erwartung $\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}$ ist eine Zufallsvariable).

2.1.22 Bemerkung: In einem ZPBBM gelten die Risikoneutralbewertungsformeln

$$\begin{aligned} V_1(\omega_H) &= \frac{q\, V_2(\omega_H, \omega_H) + (1-q)\, V_2(\omega_H, \omega_T)}{1+r}, \\ V_1(\omega_T) &= \frac{q\, V_2(\omega_T, \omega_H) + (1-q)\, V_2(\omega_T, \omega_T)}{1+r} \end{aligned}$$

und

$$V_0 = \frac{q\, V_1(\omega_H) + (1-q)\, V_1(\omega_T)}{1+r}$$

oder knapper

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}}(V_1)}{1+r}, \\ V_1 &= \frac{\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}(V_2)}{1+r} \end{aligned}$$

In der Tat wurde die im obigen Beweis mit abgeleitet.

▶ Wir beschäftigen uns jetzt und später nochmal mit dem n_T-Periodenbinomialbaummodell, deshalb geben wir jetzt keine Beweise für die folgenden Behauptungen an. In diesen Abschnitt machen wir einen kurzen Ausflug in die Implementierung (in R). Für die Erläuterung der mathematischen Grundlagen verweisen wir auf den nächsten Abschnitt.

2.1.23 Definition (n_T-Periodenbinomialbaummodell):
Das n_T-Periodenbinomialbaummodell (BBM) ist durch die folgenden Angaben beschrieben:

- Es gibt n_T Perioden der Länge Δt und $n_T + 1$ Zeitpunkte $t_i = i\Delta t, i = 0, ..., n_T$. Jetzt ist $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, ..., t_{n_T}\}$

- Anleger können Geld sicher anlegen bzw. Kredite aufnehmen. Die Verzinsung ist in allen Perioden gleich $r\Delta t, r > -1$, wobei wir nun die Verzinsung in der Form $e^{r\Delta t}$ angeben (stetige Aufzinsung). Wenn ein Anleger zum Zeitpunkt t_i den Betrag M_i in dieser Anlageform anlegt, dann ist die Auszahlung in t_{i+1} sicher $e^{r\Delta t}M_i$.

- Die Unsicherheit wird durch die n_T-fache unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes mit $\Omega = \{\omega_H, \omega_T\}$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ erfasst (ω_H bezeichnet hier den Bernoulli-Erfolg). Der Ergebnisraum ist also die Menge der Pfade der

Länge n_T aus ω_H's und ω_T's:

$$\Omega^{n_T} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n_T}) \,|\, \omega_i \in \{\omega_H, \omega_T\}\}.$$

Ω^{n_T} hat 2^{n_T} Pfade.

- Anleger können in ein riskantes Wertpapier investieren, das in $t = t_0 = 0$ für $S_0 > 0$ gehandelt wird. Der Preis in $t > 0$ dieser riskanten Anlageform ist eine Zufallsvariable. Der Preis $S_i, i = 1, ..., n_T$ des riskanten Wertpapiers im Zeitpunkt $t_i, i = 1, ..., n_T$ ergibt sich aus den ersten i Bernoulli-Ergebnissen:

  $$S_i((\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)) = S_0 u^{\sharp H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)} d^{\sharp T(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)},$$

  wobei $\sharp H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$ gleich der Anzahl der ω_H's in der Sequenz $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$ und $\sharp T(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$ gleich der Anzahl der ω_T's in der Sequenz $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$ bezeichnet. Der Preis des Basiswertes ist also nicht davon abhängig, wie ein bestimmter Knoten des Baums erreicht wurde. Lediglich die Zahl der ω_H's und ω_T's ist entscheidend. Ferner unterstellen wir $0 < d < u$.

- Anleger können zu den Zeitpunkten $t = t_i, i = 0, ..., n_T - 1$ Portfolio $(M_{i+1}, \Delta_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$ wählen. Die Anleger beobachten sukzessive die Ergebnisse der Bernoulli-Experimente. Im Zeitpunkt $t = t_i$ haben sie also die ersten i Ergebnisse $(\omega_1, ..., \omega_i)$ beobachtet. Ihre Anlagestrategie in Zeitpunkt t_i ist also i.A. eine Funktion der Realisierung $(\omega_1, ..., \omega_i)$, d.h. $(M_{i+1}, \Delta_{i+1}) =$

$(M_{i+1}(\omega_1, ..., \omega_i), \Delta_{i+1}(\omega_1, ..., \omega_i))$. Eine Sequenz $(M_{i+1}, \Delta_{i+1}), i = 0, ..., n_T - 1$ nennen wir **Handelsstrategie** des NPBBM.

▶ Beachte: M_{i+1}, Δ_{i+1} werden in t_i und nicht in t_{i+1} gewählt. Den Grund für die Indexverschiebung haben wir in der Fußnote in (2.1.2) angedeutet.

2.1.24 Definition: 1.) Eine Handelsstratgie $(M_i, \Delta_i), i = 1, ..., N$ heißt **selbstfinanzierend**, wenn für $i = 1, ..., n_T - 1$

$$M_i e^{r\Delta t} + S_i \Delta_i \equiv M_{i+1} + S_i \Delta_{i+1}.$$

$M_i e^{r\Delta t} + S_i \Delta_i$ ist der Wert in $t = t_i^-$ des t_{i-1} angeschafften Portfolios und $M_{i+1} + S_i \Delta_{i+1}$ ist der Wert in $t = t_i$ des in t_i^+ angeschafften Portfolios. Die Notation t_i^- bedeutet ....Die Notation t_i^+ bedeutet ....

2.) Eine selbstfinanzierende Handelsstratgie heißt **Arbitrage**, wenn

i.) $M_1 + \Delta_1 S_0 = 0$

ii.) $0 \neq M_{n_T} e^{r\Delta t} + \Delta_{n_T} S_{n_T} \geq 0$.

3.) Das NPBBM heißt **vollständig**, wenn es für alle $\mathbf{X} : \Omega_{n_T} \to \mathbb{R}$ eine Handelsstrategie mit

$$M_{n_T} e^{r\Delta t} + \Delta_{n_T} S_{n_T} \equiv \mathbf{X}$$

gibt.

2.1.25 Bemerkung: i.) Der Preis S_{n_T} nimmt nach n_T Perioden einen von $n_T + 1$ unterschiedlichen Werte an: $S_0 u^i d^{n_T - i}, i = 0, 1, 2, ..., n_T$. Es gilt

$$\mathbb{P}(S_{n_T} = S_0 u^i d^{n_T-i}) = \binom{n_T}{i} p^i (1-p)^{n_T-i},$$

so dass der Wertpapierpreis im Zeitpunkt n_T ist binomial verteilt.

ii.) Der Preis des Wertpapiers hängt nur von der Anzahl der ω_H's und ω_T's ab, jedoch nicht von der Reihenfolge der ω_H's bzw. ω_T's. Dieser Wertpapierpreis ist **pfadunabhängig**.

iii.) Die bedingten Auszahlungen $\mathbf{X} : \Omega_{n_T} \to \mathbb{R}$ sind unter Umständen **pfadabhängig**.

2.1.26 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega_{n_T}, \mathcal{P}(\Omega_{n_T}))$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

i.) $\mathbb{Q}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß der n_T-fachen unabhängigen Wiederholung des Bernoulli Experiments mit den Ergebnissen $\{\omega_H, \omega_T\}$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $q > 0$.

ii.) Es gilt

$$S_0 = q\, e^{-r\Delta t} S_1(\omega_H) + (1-q)\, e^{-r\Delta t} S_1(\omega_T)$$

und

$$
\begin{aligned}
S_i(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i) &= \mathbb{Q}(\omega_{i+1} = \omega_H | \boldsymbol{\omega}_{1,...,i} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)) \cdot e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \omega_H) \\
&\quad + \mathbb{Q}(\omega_{i+1} = \omega_T | \boldsymbol{\omega}_{1,...,i} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)) \cdot e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \omega_T) \\
&= q\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \omega_H) \\
&\quad + (1-q)\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, \omega_T).
\end{aligned}
$$

Die beiden Gleichungen kann man auch kurz so angeben:

$$S_i = \mathbb{E}_i^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r\Delta t} S_{i+1} \right), i = 0, ..., n_T - 1.$$

2.1.27 Satz: Für das n_T-Periodenbinomialbaummodell (NPBBM) mit $d < e^{r\Delta t} < u$ gilt:

1. Der durch dieses NPBBM modellierte Finanzmarkt ist arbitragefrei.

2. Der durch dieses NPBBM modellierte Finanzmarkt ist vollständig.

3. Mit $q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$ als Erfolgswahrscheinlichkeit erhält man das Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß.

4. Für jede Auszahlung $V_{n_T} = V_{n_T}(\omega_1, ..., \omega_{n_T}) \in \mathbb{R}^{2^{n_T}}$ in $t = t_{n_t}$ ergibt sich der faire $t = 0$ Preis V_0 als

   $$V_0 = e^{-r\,\Delta t\, n_T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_{n_T}).$$

   Die Bewertungsmethode gilt also auch für **pfadabhängige Auszahlungen**!

5. Den fairen $t = 0$ Preis V_0 kann man rekursiv bestim-

men:

$$V_i(\omega_1, ..., \omega_i) = e^{-r\Delta t} \; (qV_{i+1}(\omega_1, ..., \omega_i, \omega_H) + (1-q)V_{i+1}(\omega_1, ..., \omega_i, \omega_T$$

verwendet. Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$V_i = e^{-r\Delta t} \, \mathbb{E}_i^{\mathbb{Q}} V_{i+1}$$

angeben.

2.1.28 Bemerkung: Wir bemerken, dass die bedingte Auszahlung **pfadabhängig** sein kann. Der Wert des Derivates hängt also nicht nur vom Wert S_{n_T} der Aktie am Laufzeitende ab, sondern auch davon, wie dieser Wert erreicht wurde.

2.1.29 Bemerkung (Anpassung): Das Binomialbaummodell hat bezogen auf die Wertpapierbewertung (nur!) drei geeignet zu wählende Parameter: q, u und d. Diese Parameter können so gewählt werden, dass die Bewertungsmethode praktisch genutzt werden kann. Dazu wird eine sogenannte Anpassung bzw. Kalibrierung vorgenommen. Maßstab sind **empirische Kennziffern** sowie das **Risikoneutralbewertungsprinzip**. Durch die folgende Parameterwahl erhält man eine Anpassung an die empirisch zu ermittelnde **Varianz** der Wertpapierpreisentwicklung (vgl.

insb. Seydel [41, S. 19]):

$$\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}), \tag{2.1}$$
$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \tag{2.2}$$
$$d = 1/u, \tag{2.3}$$
$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{2.4}$$

Diese Gleichungen erhält man, wenn man folgendes Gleichungssystem löst:

$$e^{r\Delta t} = qu + (1-q)d, \tag{2.5}$$
$$qu^2 + (1-q)d^2 - (e^{r\Delta t})^2 = e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1), \tag{2.6}$$
$$ud = 1. \tag{2.7}$$

Mit der ersten Gleichung wird die erwartete Rendite des Binomialbaummodells gemäß der Risikoneutralbewertung kalibriert. Die zweite Gleichung sorgt dafür, dass die Varianz des Binomialbaummodells an die Varianz der Wertpapierkursentwicklung angepasst wird. Die rechte Seite der zweiten Gleichung entspricht dabei der Varianz einer log Normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert $r\Delta t$. Die dritte Gleichung impliziert, dass der Binomialbaum eine vertikale Achse hat. Wählt man eine hinreichend große Anzahl von Schritten, dann werden die Ergebnisse des Binomialverfahren mit dem der Formel von Black und Scholes gut übereinstimmen (die Formel wird unten hergeleitet).

Es gibt zu der oben angegeben Kalibrierungen Alternativen, die beispielsweise in Jarrow und Chatterjea [27, S. 477] und Hull [14] diskutiert werden.

2.1.30 Bemerkung: Das folgende R Skript zeigt exemplarisch, wie einfach die Implementierung in R des Binomialbaummodells ist.

```
K  = 6
S0 = 6
r  = 0.04
sigma = 0.3
T = 1
N = 1200
dt = T/N

beta = 0.5*( exp( -r*dt ) + exp( (r+sigma^2)*dt ))
u = beta + sqrt( beta^2 - 1 )
d = 1/u
q = ( exp( r*dt )- d )/( u - d )

S = vector(length=N+1)
V = vector(length=N+1)

S = S0*(u^(0:(N)))*(d^((N):0))

V = K - S
V[V<=0] = 0

qc = 1 - q
for  (i in (N:1)) {
 V = q*V[2:(i+1)] + qc*V[1:i]
}

dis = exp(-r*T)
```

```
V = dis*V

BlackScholesExplicitFormula = function(S0){
 d1 = ( log(S0/K) +
 ( r  + (sigma^2)/2 )*T   )/(sigma*sqrt(T))
 d2 = ( log(S0/K) +
 ( r  - (sigma^2)/2 )*T   )/(sigma*sqrt(T))
 # d2 = d1 - sigma*sqrt(T)
 N1 = pnorm(-d1,mean = 0,sd = 1, lower.tail = TRUE)
 N2 = pnorm(-d2,mean = 0,sd = 1, lower.tail = TRUE)
 V = K*exp(-r*T)*N2 - S0*N1
 V
}
```

Wir erhalten die Ergebnisse

```
> V
[1] 0.5898126
> BlackScholesExplicitFormula(S0)
[1] 0.5899325
> BlackScholesExplicitFormula(S0) - V
[1] 0.0001199544
```

Die Ausgabe zeigt auch den Wert der europäische Verkaufsoption gemäß Black-Scholes-Merton Modell.

▶ Die folgenden beiden Sätze mit Beweis findet man insbesondere in Günther und Jüngel [12, Abschnitt 3.1 und Abschnitt 3.3]

2.1.31 Satz: Im BBM gilt für den Preis C_0 einer europäische Kaufoption mit Ausübungskurs K und der Fälligkeit nach n_T Perioden:

$$C_0 = S_0\Phi(m, p') - Ke^{-r\Delta t N}\Phi(m, q) \tag{2.8}$$

$$p' = que^{-r\Delta t} \tag{2.9}$$

$$\Phi(m, p) = \sum_{k=m}^{n_T} \binom{n_T}{k} p^k (1-p)^{n_T-k} \tag{2.10}$$

$$m = \min\{0 \le k \le n_T : u^k d^{n_T-k} S_0 - K \ge 0\} \tag{2.11}$$

Diese Formal heißt **diskrete Formel von Black und Scholes**.

2.1.32 Satz (Formel von Black und Scholes): Es sei T die Restlaufzeit in Jahren einer europäische Kaufoption. Wir wählen das NPBBM mit $u = \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}), d = 1/u$ und der Periodenlänge $\Delta t = \frac{T}{n_T}$ in Jahren. Dann gilt für den Preis $C_0^{n_T}$ einer europäische Kaufoption mit Ausübungskurs K und Restlaufzeit T:

$$\lim_{n_T\to\infty} C_0^{n_T} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{2.12}$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Diese Fermal heißt **Formel von Black und Scholes**.

Beweis: Vgl. Günther und Jüngel [12, Abschnitt 3.3]

2.1.33 Fallstudie: Binomialbaum für amerikanische Optionen Beispiel aus Hull replizieren. Vgl. Hull [15, Seite 565]

2.1.34 Fallstudie: Delta-Hedging. Vgl Hull [15, Seite 570] Seydel [42, Seite 26]

2.1.35 Fallstudie: Alternative Spezifikationen. Vgl. Román [39, Abschnitt 2.7], Seydel [42, Seite 26], Seydel [43]

2.2 Das Binomialbaum mit Prozessen

Man kann das N-Perioden Binomialbaummodell ausschließlich auf Basis des Modellierungsansatzes gemäß 2.1 einführen. In der Tat ist das der übliche und u.U. auch zweckmäßige Weg. Für das spätere Studium (insbesondere für die zeitstetigen Modelle) ist es aber zweckmäßiger, sich der **Terminologie der stochastischen Prozesse** und der (erzeugten) **Filtrationen** auf einem allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zu bedienen. Wir können so relativ abstrakte Konzepte in einem übersichtlichen und bekannten finanzwirtschaftlichen Kontext einführen. Diese Konzepte werden insbesondere für allgemeinere Mehrperiodenmodelle und für zeit-stetige Modelle benötigt.

Trotz der erheblichen Redundanz wird das Binomialbaummodell jetzt noch mal in einem allgemeineren Kontext eingeführt. Wir benötigen einige Konzepte der Stochastik.

2.2.1 Satz: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner sei $\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\}, Z_i \in \mathcal{F}$ eine Zerlegung von Ω, d.h.

$$\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} Z_i \quad .$$

Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{Z}) = \left\{ \biguplus_{j \in J} Z_j \mid J \subset \{1, ..., n\} \right\}.$$

$\sigma(\mathcal{Z})$ ist die kleinste σ-Algebra, die die Mengen $Z_1, ..., Z_n$ der Zerlegung $\mathcal{Z}$ enthält. $\sigma(\mathcal{Z})$ besteht aus den möglichen Vereinigungen aus den Menge $Z_1, ..., Z_n$. $\sigma(\mathcal{Z})$ heißt **die von der Zerlegung $\mathcal{Z}$ erzeugte σ-Algebra**.

► Die Zerlegung repräsentiert eine Fallunterscheidung: Eines der Ereignisse Z_i tritt ein bzw. ist eingetreten. Für einen **Wahrscheinlichkeitsraum** benötigen wir eine σ-Algebra. Die zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ *passende* σ-Algebra ist $\sigma(\mathcal{Z})$.

2.2.2 Definition: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **$\mathcal{F}$-messbar**, falls $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Borelmenge B gilt. In der Tat muss $\xi^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ nur für alle Loravalle (links offene rechts abgeschlossene) oder Intervalle I gelten (vgl. Jäger-Ambrozewicz [24, ...]).

Wir wollen regelmäßig von der Wahrscheinlichkeit sprechen (können), dass die Zufallsvariable ξ einen Wert in einem Intervall I annimmt (z.B.: der Verlust ist kleiner gleich 30 Millionen Euro, die Rendite liegt im Intervall von -0.01 bis 0.01). Das geht aber nur dann, wenn $F := \xi^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ gilt, denn nur für Mengen $F \in \mathcal{F}$ ist $\mathbb{P}(F)$ definiert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ξ einen Wert in I annimmt, ist dann

$$\mathbb{P}(\xi \in I) := \mathbb{P}^{\xi}(I) := \mathbb{P}(\xi^{-1}(I)).$$

Das Maß $\mathbb{P}^{\xi}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt die **Verteilung der Zufallsvariable ξ**.

Die Voraussetzung der Messbarkeit ist in stochastischen Zusammenhängen also eine ganz **natürliche und unverzichtbare Voraussetzung**.

Wenn ξ bezüglich $\mathcal{F}$ messbar ist, dann schreiben wir $\xi \in \mathcal{F}$ oder formulieren, dass ξ $\mathcal{F}$-messbar ist.

Eine **messbare** Abbildung $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **Zufallsva-**

riable. Der Name passt, denn der Wert von X hängt vom zufälligen Ergebnis ω ab.

Es sei $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die kleinste σ-Algebra, so dass ξ messbar ist, heißt die **von ξ erzeugte σ-Algebra** und wird mit $\sigma(\xi)$ bezeichnet.

Also

i.) $\xi \in \sigma(\xi)$ und

ii.) wenn $\xi \in \mathcal{A}$ für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$, dann ist $\sigma(\xi) \subset \mathcal{A}$.

▶ Die kleinste σ-Algebra enthält *grobe* Mengen. ......

▶ Wenn wir im Folgenden von einer Zufallsvariable sprechen, dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum auch wenn dieser nicht explizit genannt wird.

2.2.3 Satz: Es sei $\sigma(\mathcal{Z})$ eine σ-Algebra auf Ω, die durch eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\}$ erzeugt wird. Eine Zufallsvariable ξ ist genau dann $\sigma(\mathcal{Z})$-messbar, wenn ξ auf den Mengen Z_i konstant ist.

Beweis: Vgl. Jäger-Ambrozewicz [24, ...]

▶ Wäre die Zufallsvariable ξ nicht auf Z_i konstant, dann könnte man am Wert von ξ mehr ablesen als die Information, dass ein **irgendein** $\omega \in Z_i$ eingetreten ist (irgendein ist wichtig, denn wir wissen nicht welches $\omega \in Z_i$ eingetreten ist!).

2.2.4 Satz: Es sei $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit endlichem Bild$(\xi) = \{x_1, ..., x_n\}$, wobei die x_i verschieden sind. Die Mengen $Z_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$ definieren eine Zerlegung und es gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) &= \sigma(\mathcal{Z}) \\ &= \left\{ \bigcup_{k \in J} Z_k | J \subset \{1, ..., n\} \right\}\end{aligned}$$

Beweis: Vgl. Jäger-Ambrozewicz [24, ...]

2.2.5 Beispiel: Es sei $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ((Bernuolli-)Variable) mit Bild$(\xi) = \{u, d\}$, wobei o.B.d.A. $u > d$. Die Mengen $Z_u = \xi^{-1}(\{u\}) = \{\xi = u\}, Z_d = \xi^{-1}(\{d\}) = \{\xi = d\}$ definieren eine Zerlegung und

$$\sigma(\xi) = \sigma(\mathcal{Z}) = \{\emptyset, Z_u, Z_d, \Omega\}.$$

Z_u ist Menge der Ergebnisse, bei denen ξ den Wert u annimmt. Z_d ist Menge der Ergebnisse, bei denen ξ den Wert d annimmt.

2.2.6 Definition: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Folge von Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, , ..., \xi_T$ heißt **(zeitdiskreter) stochastischer Prozess**.

► In der Regel gehen wir davon aus, dass wir die Realisierungen von ξ_i sukzessive **beobachten**. Ein stochastischer Prozess erzeugt somit **sukzessive Information**.

Diesen *Vorgang* werden wir wir mathematisch mit einer sogenannten **Filtrationen** modellieren. Filtrationen sind im zeitdiskreten zustandsdiskreten Kontext vergleichsweise einfach. Die jeweiligen Realisierungen erzeugen Zerlegungen, die dann σ Algebren definieren. An die Notation muss man sich erst gewöhnen. Wenn man sich gewöhnt hat, dann wird vieles sehr bequem und übersichtlich. Zudem passt die Notation auch weitestgehend auf den zeitstetigen und zustandsstetigen Kontext.

2.2.7 Definition mit Bemerkungen: Es sei $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_T$ ein **zeitdiskreter stochastischer Prozess** mit $\mathrm{Bild}(\xi_t) = \{u, d\}$, wobei wir $0 < d < u$ unterstellen. Die **(Bernoulli-)Zufallsvariablen** ξ_t modellieren die Auf/Ab-Bewegungen des Kurses eines Wertpapiers in den Perioden $t = 1, 2, ..., T$.

Die Mengen

$$
\begin{aligned}
Z_{1,(u,*)} &= \xi_1^{-1}(\{u\}) = \{\omega | \xi_1(\omega) = u\} = \{\xi_1 = u\} \\
Z_{1,(d,*)} &= \xi_1^{-1}(\{d\}) = \{\omega | \xi_1(\omega) = d\} = \{\xi_1 = d\}
\end{aligned}
$$

definieren eine **Zerlegung (Partition)** $\mathcal{Z}_1$ des Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = Z_{1,(u,*)} \uplus Z_{1,(d,*)}$. Dabei steht der $*$ für *beliebige Fortsetzung* des stochastischen Prozesses. $Z_{1,(u,*)}$ ist die Menge der *Zustände* ω, für die der ξ_1-Wert u ist; also $\xi_1(\omega) = u$. Analog ist $Z_{1,(d,*)}$ die Menge der *Zustände* ω, für die der ξ_1-Wert d ist.

Zu dieser Zerlegung betrachten wir die erzeugte σ-Algebra

$\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{Z}_1)$. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_1$ erfasst den Sachverhalt, dass man den ersten Kursschritt beobachtet hat.

Die Menge $Z_{1,(u,*)}$ können wir weiter zerlegen:

$$\begin{aligned} Z_{1,(u,*)} &= \{\xi_1 = u, \xi_2 = u\} \uplus \{\xi_1 = u, \xi_2 = d\} \\ &= Z_{2,(u,u,*)} \uplus Z_{2,(u,d,*)} \quad . \end{aligned}$$

Analog für $Z_{1,(d,*)}$

$$\begin{aligned} Z_{1,(d,*)} &= \{\xi_1 = d, \xi_2 = u\} \uplus \{\xi_1 = d, \xi_2 = d\} \\ &= Z_{2,(d,u,*)} \uplus Z_{2,(d,d,*)} \quad . \end{aligned}$$

Die Mengen $Z_{2,(u,u,*)}, Z_{2,(u,d,*)}, Z_{2,(d,u,*)}$ und $Z_{2,(d,d,*)}$ definieren die Zerlegung $\mathcal{Z}_2$ von Ω. $Z_{2,(u,d,*)}$ ist beispielsweise die Menge der Zustände ω, in denen zunächst der Schritt $\xi_1(\omega) = u$ und dann der Schritt $\xi_2(\omega) = d$ stattfanden.

Die Zerlegung $\mathcal{Z}_2$ definiert die σ-Algebra $\mathcal{F}_2$. Dabei gilt $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, d.h. $\mathcal{F}_2$ ist eine sogenannte **Verfeinerung** von $\mathcal{F}_1$.

So gehen wir Schritt für Schritt voran und erhalten eine Folge von Zerlegungen $\mathcal{Z}_t$ und σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ mit $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$. Die Zerlegung $\mathcal{Z}_t$ ergibt sich dabei aus $\mathcal{Z}_{t-1}$: Die Mengen $Z_{t-1,(x_1,\ldots,x_{t-1},*)}$ der Zerlegung $\mathcal{Z}_{t-1}$ werden *binär* zerlegt, d.h.

$$Z_{t-1,(x_1,\ldots,x_{t-1},*)} = Z_{t,(x_1,\ldots,x_{t-1},u,*)} \uplus Z_{t,(x_1,\ldots,x_{t-1},d,*)} \ .$$

Quellen: Pliska [37, Seite .....] Compolieti und Marakov [4, Seite ......] Elliot und Kopp [**?**, ...]

2.2.8 Satz: Die gerade in (2.2.7) eingeführte σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ ist die von den Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_t$ erzeugte σ-Algebra, d.h. die kleinste σ-Algebra, so dass alle Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_t$ messbar sind:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, ..., \xi_t).$$

Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ repräsentiert die **Information**, die ein Anleger hat, der **die Kursentwicklung bis t beobachtet** hat.

2.2.9 Baustellen: Warum gilt $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_t)$ nicht? ..... Wäre $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_t)$, dann wäre der Anleger vergesslich!

Wir betrachten den Fall $T = 2$.
Es ist $\sigma(\xi_2) = \{\emptyset, \{(H,H),(T,H)\}, \{(H,T),(T,T)\}, \{H,T\}^2\}$.
Es ist $\sigma(\xi_1, \xi_2) = \{\emptyset, \{(H,H)\}, \{(H,T)\}, \{(T,H)\}, \{(T,T)\},$ alle Vereinig
$= \mathcal{P}(\{H,T\}^2)$. Wäre $\sigma(\xi_2)$ die Information des Anleger, dann der Anleger vergesslich: Er hätte die erste Kursbewegung **vergessen**.

▶ Warum gilt $\sigma(\xi_1, \xi_2) = \sigma(\xi_1) \cap \sigma(\xi_2)$ nicht? Wir betrachten wieder $T = 2$. Es ist $\sigma(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{P}(\{H,T\}^2)\}$.

Es ist $\sigma(\xi_1) = \{\emptyset, \{(H,T),(H,H)\}, \{(T,T),(T,H)\}, \{H,T\}^2\}$.
Es ist $\sigma(\xi_2) = \{\emptyset, \{(H,H),(T,H)\}, \{(H,T),(T,T)\}, \{H,T\}^2\}$.
Also $\sigma(\xi_1) \cap \sigma(\xi_2) = \{\emptyset, \{H,T\}^2\}$.

▶ Wie kann man $\sigma(g, f)$ (auch) charakterisieren? Gemäß Henze [18, Seite 331, 2. Auflage]

$$\sigma(f, g) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{B}) \cup g^{-1}(\mathcal{G}))$$

Warum? Alle Mengen in $f^{-1}(\mathcal{B})$ bzw. in $g^{-1}(\mathcal{B})$ müssen in $\sigma(f, g)$ liegen. Also gilt für $\mathcal{M} = f^{-1}(\mathcal{B}) \cup g^{-1}(\mathcal{B})$, dass $\mathcal{M} \subset \sigma(f, g)$. Dann gilt auch $\sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(f, g)$. Aber es gilt auch $f, g \in \sigma(\mathcal{M})$. Dann muss $\sigma(f, g) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

2.2.10 Definition: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_T$ mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ heißt **Filtration** auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ein stochastischer Prozess (X_t) heißt **$\mathcal{F}$-adaptiert**, falls $X_t \in \mathcal{F}_t$ für $t = 1, ..., N$ gilt

2.2.11 Bemerkung: In vorhergehenden Abschnitt 2.1 war $\Omega = \{H, T\}^N = \{(\omega_1, ..., \omega_N) | \omega_i \in \{H, T\}\}$ die Ergebnismenge und die Kursschritte ergaben sich entsprechend: $\xi_i = u$ falls $\omega_i = H$ bzw. $\xi_i = d$ falls $\omega_i = T$. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist *minimal*: Genau zu geschnitten auf das Risiko der Kursentwicklung.

In diesem Anschnitt ist Ω irgendeine Ergebnismenge. So ein beliebiges Ω kann Risiko umfassender abbilden. Die Kursschritte des riskanten Wertpapiers sind die Realisierungen eines stochastischen Prozesses auf Ω. Die Kursschritte erzeugen *Schatten*/Information/Teilstrukturen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Da wir in diesen Abschnitt zum Binomialbaummodell nur die erzeugte σ-Algebra verwenden, erhalten wir – wie wir gleich sehen werden – keine anderen Ergebnisse als in 2.1. Der Rahmen ist aber flexibler.

Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ repräsentiert die Information über die Kursentwicklung bis t. In dem von uns betrachten Modell kann man die Kursentwicklung selbst (die Kurspfade) selbst als Repräsentation der Information verwenden (so wie im vorhergehenden Abschnitt). Das ist in der Tat für das Binomialbaummodell auch üblich. In allgemeineren Modellen ist das aber ungeeignet/unüblich. Als Vorbereitung auf die allgemeineren Modelle lohnt sich deshalb der *Umweg* über Filtrationen.

Zu jeder Menge Z der Zerlegung $\mathcal{Z}_t$ gehört ein eindeutig bestimmter Pfadanfang $(x_1, ..., x_t, *)$. .....

Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist unabhängig vom stochastischen Prozess generisch gegeben. Aus $\mathbb{P}$ ergibt sich die Verteilung der Zufallsvariablen $\mathbb{P}^{\xi_i}$

2.2.12 Satz: Wenn $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\sigma(\xi_1, ..., \xi_t)$ ist, dann gibt es eine Abbildung $\tilde{X}_t : \{u, d\}^t \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= \tilde{X}_t(\xi_1(\omega), ..., \xi_t(\omega)) \\ &= \tilde{X}_t(x_1, ..., x_t), \end{aligned}$$

wobei $\xi_i(\omega) = x_i$ gelten soll. ▶ **Konvention Pfadraum/Zustandsraum:** Auf Basis der Beobachtung 2.2.12 werden wir im Folgenden

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\xi_1, ..., \xi_t"] \arrow[dr, "X \in \sigma(\xi_1, ..., \xi_t)"'] & \{u, d\}^t \arrow[d, "\tilde{X}"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\mathfrak{z}\ X_t \in \sigma(\xi_1, ..., \xi_t) \Rightarrow \exists \tilde{X}_t : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\xi_1(\omega), ..., \xi_t(\omega))$$

Abbildung 2.2.1: Schema zum Satz 2.2.12

z.B. Handelsstrategien in t - die $\sigma(\xi_1, ..., \xi_{t-1})$ messbar sind – als Funktion des Kursverlauf $(x_1, ..., x_{t-1})$ bis $t - 1$ angeben, *obwohl* es gemäß Definition messbare Abbildungen auf Ω sind; also Funktionen von ω und nicht von $(x_1, ..., x_{t-1})$. Wir schreiben $X_t(x_1, ..., x_{t-1}) = \tilde{X}_t(x_1, ..., x_{t-1})$ anstatt $X_t(\omega)$, d.h. wir verzichten auf die Tilde $\tilde{}$.

2.2.13 Bemerkung: Die Abbildung $\Xi_t : \Omega \to \mathbb{R}^t$

$$\omega \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \\ \vdots \\ \xi_t(\omega) \end{pmatrix}$$

ist eine Abbildung von den Zuständen Ω in die Menge der Pfade $\mathbb{R}^t$ (in Spalten erfasst). Das Bild von $\Xi_t : \Omega \to \mathbb{R}^t$ ist die Menge der Pfade der Inkremente.

Es gilt

$$\sigma(\xi_1, ..., \xi_t) = \sigma(\Xi_t).$$

2.2.14 Bemerkung: Im Satz 2.2.12 haben wir die Information bis t intuitiv durch $\sigma(\xi_1, ..., \xi_t)$ repräsentiert. Da $\sigma(\xi_1, ..., \xi_t) = \sigma(\Xi_t)$ gilt, können wir dafür auch $\sigma(\Xi_t)$ verwenden; vgl. dazu das sogenannte Faktorisierungslemma (Henze [18, Seite 175]).

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "\Xi_t"] \arrow[drr, "X_t \in \sigma(\Xi_t)"'] & & \mathbb{R}^t \supset \{u, d\}^t \arrow[d, "\tilde{X}_t"] \\
& & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{z}$ $X_t \in \sigma(\Xi_t) \Rightarrow \exists \tilde{X}_t : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\,\Xi_t(\omega)\,)$

Abbildung 2.2.2: Faktorisierungslemma: Henze [18, Seite 175]

▶ **Baustelle** Jetzt wird die Eigenschaft predictable relevant; vgl. Lamberton und Lapayre [30, Seite 183]. Naja, noch nicht. Wenn der Integrator Spürnge hat und die Zeit stetig ist. Dann ......

2.2.15 Definition: Es sei $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_T$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess h_t heißt **previsibel**, falls $h_t \in \mathcal{F}_{t-1}, t = 1, ..., T$ ist.

2.2.16 Bemerkung: Die beobachteten Wertpapierpreisänderungen sind die Realisierung von stochastischen Prozessen ξ_t. Die Kursänderungen erzeugen Information und die erzeugte Information erfassen wir durch die erzeutge Filtration.

2.2.17 Definition: Das **Zweiperiodenbinomialbaummodell (ZPBBM)** ist durch die folgenden Angaben beschrieben:

- Es gibt zwei Perioden und drei Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$.
- Anleger können für den Zinssatz $r > -1$ Geld sicher anlegen bzw. Kredite aufnehmen. Dieser Zinssatz ist in beiden Perioden gleich r.
- Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Anleger können in ein riskantes Wertpapier investieren. In $t = 0$ wird das Wertpapier für $S_0 > 0$ gehandelt. Für den Preis des Wertpapiers gilt

$$S_1 = S_0\,\xi_1,$$
$$S_2 = S_0\,\xi_1\,\xi_2.$$

  Dabei sind ξ_1, ξ_2 unabhängige Bernoulli Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathrm{Bild}(\xi_i) = \{u, d\}$ und $\mathbb{P}(\xi_i = u) = p > 0$. Ferner nehmen wir an, dass $0 < d < u$ gilt.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_1 gilt

$$\mathbb{P}(S_1 = S_0 u) = \mathbb{P}(\xi_1 = u) = p,$$
$$\mathbb{P}(S_1 = S_0 d) = \mathbb{P}(\xi_1 = d) = 1 - p.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_2 gilt

$$\mathbb{P}(S_2 = S_0 u^2) = \mathbb{P}(\xi_1 = u, \xi_2 = u) = p^2,$$
$$\mathbb{P}(S_2 = S_0 ud) = \mathbb{P}(\xi_1 = u, \xi_2 = d \vee \xi_1 = d, \xi_2 = u) = 2p(1-p),$$
$$\mathbb{P}(S_2 = S_0 d^2) = \mathbb{P}(\xi_1 = d, \xi_2 = d) = (1-p)^2.$$

Wir können die Wahrscheinlichkeiten für die Pfade auch konkret so angeben:

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = p^{\#u((x_1,x_2))}(1-p)^{\#d((x_1,x_2))},$$

wobei $\sharp u(x_1, x_2, ..., x_n)$ gleich der Anzahl der u's in der Sequenz $(x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\sharp d(x_1, x_2, ..., x_n)$ gleich der Anzahl der d's in der Sequenz $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bezeichnet.

- Anleger können ihr Portfolio nicht nur in $t = 0$ wählen, sondern in $t = 1$ **anpassen**; je nach **Information** über die Kursentwicklung. Der Informationsstand wird durch **Sub-σ-Algebren** erfasst:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\xi_1)$$

Mit $M_i, i = 1, 2$ bezeichnen wir die Geldmarktposition in GE und mit $\Delta_i, i = 1, 2$ die Anzahl der Stücke des Wertpapiers zu Beginn der Periode i; also zu den Zeitpunkten t_1, t_2. Die Zufallsvariablen M_i und Δ_i sind $\mathcal{F}_{i-1}$-messbar. Der Zufallsvektor $(M_i, \Delta_i)^T, i = 1, 2$ bezeichnet das Portfolio in $t = i$. Die stochastischen Prozesse M_1, M_2 und Δ_1, Δ_2 bezeichnen wir als **Anlagestrategie**.

Da $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ist, müssen M_1 und Δ_1 reelle Konstanten sein. Da $\mathcal{F}_1 = \sigma(\xi_1)$ sind M_2 und Δ_2 Funktionen der Realisierung der Zufallsvariable ξ_1; vgl die Konvention 2.2.12. In der Tat: Wenn M_2 und Δ_2 $\mathcal{F}_1$ messbar sind, dann sie M_2 und Δ_2 konstant auf den Mengen $\{\xi = u\}$ bzw. $\{\xi = d\}$. Die drei Objekte (6 reelle Zahlen)

$$(M_1, \Delta_1)^T, (M_2(u), \Delta_2(u))^T, (M_2(d), \Delta_2(d))^T$$

erfassen die gesamte **Anlagestrategie**.

Die letzte Absatz zeigt, dass wir inhaltlich das gleiche Modell wie im vorhergehenden Abschnitt erhalten.

Der Wert

$$V_0 = M_1 + \Delta_1 S_0$$

erfasst die **Anfangskosten bzw. Anschaffungskosten** der Strategie – die in $t = 0$ anfallen. Die

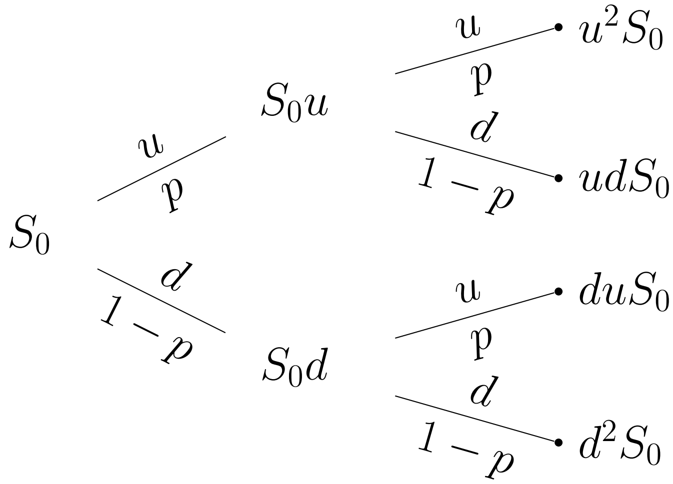
Zufallsvariable

$$V_2 = (1 + r)M_2 + \Delta_2 S_2$$

erfasst die **Auszahlungen der Strategie**, die sich in $t = 2$ ergeben.

Beachte $V_2 \in \mathcal{F}_2$.

- Das folgende Diagramm zeigt das Zwei-Perioden-Modell schematisch.



2.2.18 Definiton: Eine Anlagestrategie des ZPBBM heißt **selbstfinanzierend**, falls

$$M_1 \cdot (1 + r) + \Delta_1 \cdot S_1 = M_2 + \Delta_2 \cdot S_1$$

gilt.

2.2.19 Definiton: Das ZPBBM heißt **arbitragefrei**, wenn es keine selbstfinanzierende Anlagestrategie mit Anschaffungskosten $V_0 = 0$ gibt, so dass die Auszahlung $0 \neq V_2 \geq 0$

nicht-negativ aber von Null verschieden ist.

2.2.20 Definiton: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß** des ZPBBM, wenn

i.) Es gibt ein $0 < q < 1$ mit

$$\mathbb{Q}(\{\xi_2 = x_1, \xi_2 = x_2\}) = q^{\#u((x_1,x_2))}(1-q)^{\#d((x_1,x_2))}.$$

ii.) Es gilt

$$S_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1}{1+r}\right) = q\,\frac{S_0 u}{1+r} + (1-q)\,\frac{S_0 d}{1+r},$$
$$S_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_2}{1+r}\,|\,\mathcal{F}_1\right).$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
S_0 u &= \mathbb{Q}(\xi_2 = u | \xi_1 = u)\frac{S_0 u^2}{1+r} + \mathbb{Q}(\xi_2 = d | \xi_1 = u)\frac{S_0 ud}{1+r} \\
&= q\frac{S_0 u^2}{1+r} + (1-q)\frac{S_0 ud}{1+r} \\
S_0 d &= \mathbb{Q}(\xi_2 = u | \xi_1 = d)\frac{S_0 ud}{1+r} + \mathbb{Q}(\xi_2 = d | \xi_1 = d)\frac{S_0 d^2}{1+r} \\
&= q\frac{S_0 ud}{1+r} + (1-q)\frac{S_0 d^2}{1+r}
\end{aligned}$$

2.2.21 Baustelle: In der obigen Definition wird das Risikoneutralwahrscheinlichkeitmaß über die Werte von ξ_1, ξ_2 charakterisiert: $\mathbb{Q}(\{\xi_2 = x_1, \xi_2 = x_2\}) = \mathbb{Q}(Z_{2,(x_1,x_2)}) = q^{\#u((x_1,x_2))}(1-q)^{\#d((x_1,x_2))}$. Wir müssen uns überlegen, dass/wie das konsistent auf ganz $(\Omega, \mathcal{A})$ geht. Dazu geben wir die passende Zähldichte an. Es sei $\omega \in Z_{2,(x_1,x_2)}$. Dann

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) = q^{\#u((x_1,x_2))}(1-q)^{\#d((x_1,x_2))}$$

Die Mengen $Z_{2,(x_1,x_2)}, x_1, x_2 \in \{u, d\}$ definieren eine Zerlegung von Ω. Je nach dem in welchem $Z_{2,(x_1,x_2)}$ liegt, ist $\mathbb{Q}$ gemäß obiger Formel definiert.

2.2.22 Satz: Wenn $d < 1 + r < u$ gilt, dann ist der durch das ZPBBM modellierte Finanzmarkt **arbitragefrei**. Jede $\mathcal{F}_2$ messbare Auszahlung kann repliziert werden. Das Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ergibt sich, wenn man die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

wählt. Es gelten die Risikoneutralbewertungsformeln

$$V_0 = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_1)}{1+r}$$
$$V_1 = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_2|\mathcal{F}_1)}{1+r}$$

2.2.23 Bemerkung: Das Gesamtmodell ist AF, wenn alle TM AF sind ......

2.2.24 Definition: Das n **Perioden Binomialbaummodell (nPBBM)** ist durch die folgenden Angaben beschrieben:

Lohnt sich der Aufwand oder reicht 2 Perioden?

- Es gibt n Perioden der Länge Δt und $n+1$ Zeitpunkte $t_i = i \cdot \Delta t, i = 0, ..., n$.

- Anleger können Geld sicher anlegen bzw. Kredite aufnehmen. Die Verzinsung ist in allen Perioden gleich $r\Delta t, r > -1$, wobei wir nun die Verzinsung in der Form $e^{r\Delta t}$ angeben. Wenn ein Anleger zum Zeitpunkt t_i den Betrag M_i in dieser Anlageform anlegt, dann ist die Auszahlung in t_{i+1} sicher $e^{r\Delta t} M_i$.

- Anleger können in ein riskantes Wertpapier investieren. In $t = 0$ wird das Wertpapier für $S_0 > 0$ gehandelt. Für den Preis des Wertpapier gilt

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_0\, \xi_1, \\
S_2 &= S_0\, \xi_1\, \xi_2, \\
&\cdots \\
S_i &= S_0\, \xi_1\, \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_i
\end{aligned}
$$

  ξ_i sind unabhängige Bernoulli Zufallsvariablen mit $\text{Bild}(\xi_i) = \{u, d\}$ und $\mathbb{P}(\xi_i = u) = p > 0$. Ferner nehmen wir an, dass $0 < d < u$ gilt.

  Es ist

$$\mathbb{P}(\{(\xi_1, ..., \xi_n) = (x_1, ..., x_n)\}) = p^{\#u(x_1,...,x_n)}(1-p)^{\#d(x_1,...,x_n)},$$

  wobei $\sharp u(x_1, x_2, ..., x_n)$ gleich der Anzahl der u's in der Sequenz $(x_1, x_2, ..., x_n)$ und $\sharp d(x_1, x_2, ..., x_n)$ gleich der Anzahl der d's in der Sequenz $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bezeichnet.

- Anleger können ihr Portfolio nicht nur in $t = 0$ wählen, sondern zudem in $t = t_i$ anpassen; je nach Information über die Kursentwicklung. Der Informationsstand wird durch Sub-σ-Algebren erfasst:

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_i = \sigma(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i).$$

  $\mathcal{F}_i$ ist also die kleinste σ-Algebra, so dass die Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i$ messbar sind.

  Anleger können zu den Zeitpunkten $t = t_i, i = 0, ..., n-1$ Portfolio $(M_{i+1}, \Delta_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$ wählen. Die Zufallsvariablen M_{i+1}, Δ_{i+1} sind $\mathcal{F}_i$ messbar.[4] Die Anleger beobachten (und vergessen nicht) sukzessive die Ergebnisse der Bernoulli-Experimente. Mathematisch erfassen wir den Informationsstand über die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit, die im diskreten Zusammenhang eine einfache Auslegung hat: Im Zeitpunkt $t = t_i$ haben sie also die ersten i Ergebnisse $(\xi_1, ..., \xi_i)$ beobachtet. Ihre Anlagestrategie M_{i+1}, Δ_{i+1} ist also eine Funktion der Realisierung $(\xi_1, ..., \xi_i)$, d.h. $(M_{i+1}, \Delta_{i+1}) = (M_{i+1}(\xi_1, ..., \xi_i), \Delta_{i+1}(\xi_1, ..., \xi_i)$ Einen stochastischen Prozess $(M_i, \Delta_i), i = 1, ..., N$ nennen wir **Handelsstrategie** des nPBBM.

[4]Stochastische Prozesse ϕ_i, die $\mathcal{F}_{i-1}$ messbar sind heißen *predictable*. Prozesse, die $\mathcal{F}_i$ messbar sind heißen *adaptiert*. In einigen Quellen wird dieser Unterschied vernachlässigt. In diskreten Modell ist der Unterschied in der Tat nicht wesentlich; in Zeitsteigen Modelle jedoch nicht. Dieser Text soll auf zeitsteige Modelle vorbereiten und deshalb wird der Unterschied gemacht.

2.2.25 Bemerkung: Die Dynamik der Wertpapierkurse kann man auch wie folgt angeben:

$$S_i = S_{i-1} \cdot \xi_i, i = 1, ..., n$$

Vorausschauend – nämlich mit Blick auf das Black-Scholes-Merton Modell – ist insbesondere die folgende Spezifikation nützlich. Zunächst

$$\ln S_i = \ln S_{i-1} + \ln \xi_i = \ln S_{ji-1} + \zeta_i$$

mit $\zeta_i = \ln \xi_i$. Jetzt wählen wir μ^{logs} und σ, sodass $\Delta S_i = \ln S_i - \ln S_{i-1} = \zeta_i = \mu^{\text{logs}} \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot z_i$, wobei z_i iid Bernoulli Zufallsvariablen mit $\text{Bild}(z_i) = \{-1, 1\}$ und $\mathbb{P}(z_i) = \frac{1}{2}$ sind. Wir erhalten also

$$\ln S_i = \ln S_{i-1} + \mu^{\text{logs}} \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot z_i$$

2.2.26 Definition: 1.) Eine Handelsstratgie $(M_i, \Delta_i), i = 1, ..., n$ heißt **selbstfinanzierend**, wenn für $i = 1, ..., n-1$

$$M_i e^{r\Delta t} + S_i \Delta_i \equiv M_{i+1} + S_i \Delta_{i+1}.$$

2.) Eine selbstfinanzierende Handelsstratgie heißt **Arbitrage**, wenn

i.) $M_1 + \Delta_1 S_0 = 0$ und

ii.) $0 \neq M_n e^{r\Delta t} + \Delta_n S_n \geq 0$.

3.) Das NPBBM heißt **vollständig**, wenn es für alle $\mathbf{X} \in$

$\mathcal{F}_n$ eine Handelsstrategie mit

$$M_n e^{r\Delta t} + \Delta_n S_n \equiv \mathbf{X}$$

gibt.

2.2.27 Bemerkung: i.) Der Preis S_n nimmt nach n Perioden $n+1$ unterschiedliche Werte an: $S_0 u^i d^{n-i}, i = 0, 1, 2, ..., n$. Es gilt

$$\mathbb{P}(S_n = S_0 u^i d^{n-i}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

so dass der logarithmierte Wertpapierpreis im Zeitpunkt n binomial verteilt ist.

ii.) Der Preis des Wertpapiers hängt nur von der Anzahl der u's und d's ab, jedoch nicht von der Reihenfolge der u's bzw. d's. Der Wertpapierpreis ist **pfadunabhängig**.

iii.) Die bedingten Auszahlungen $\mathbf{X}$ sind im allgemeinen **pfadabhängig**.

2.2.28 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß**, wenn

i.) Es gibt ein $0 < q < 1$ mit

$$\mathbb{Q}(\{(\xi_1, ..., \xi_n) = (x_1, ..., x_n)\}) = q^{\#u(x_1,...,x_n)}(1-q)^{\#d(x_1,...,x_n)}.$$

ii.) Es gilt

$$\begin{aligned}
S_0 &= q\, e^{-r\Delta t} S_1(u) + (1-q)\, e^{-r\Delta t} S_1(d),\\
S_i(x_1,...,x_i) &= \mathbb{Q}(\xi_{i+1} = u | \boldsymbol{\xi}_{1,...,i} = (x_1,...,x_i))\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(x_1,...,x_i,u)\\
&\quad + \mathbb{Q}(\xi_{i+1} = d | \boldsymbol{\xi}_{1,...,i} = (x_1,...,x_i))\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(x_1,...,x_i,d)\\
&= q\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(x_1,x_2,...,x_i,u)\\
&\quad + (1-q)\, e^{-r\Delta t}\, S_{i+1}(x_1,x_2,...,x_i,d)
\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen kann man auch kurz so angeben:

$$S_i = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r\Delta t} S_{i+1} | \mathcal{F}_i\right), i = 0,...,n-1.$$

2.2.29 Satz: Für das n-Perioden Binomialbaummodell (nPBBM) mit $d < e^{r\Delta t} < u$ gilt:

1. Der durch dieses nPBBM modellierte Finanzmarkt ist arbitragefrei.

2. Der durch dieses nPBBM modellierte Finanzmarkt ist vollständig.

3. Mit $q = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$ als Erfolgswahrscheinlichkeit erhält man *das* Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß. (Wegen der Vollständigkeit ist das Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß eindeutig.)

4. Für jede bedingte Auszahlung $V_n = V_n(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^{2^n}$ für den Zeitpunkt $t = t_n$ ergibt sich der faire

$t = 0$ Preis V_0 als

$$V_0 = e^{-r\cdot\Delta t\cdot n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_n). \tag{2.13}$$

Die Bewertungsmethode gilt also auch für **pfadabhängige Auszahlungen**!

5. Den fairen $t = 0$ Preis V_0 kann man **rekursiv** bestimmen: Für $i = n-1, ..., 1$

$$V_i(x_1, ..., x_i) = e^{-r\Delta t}(qV_{i+1}(x_1, ..., x_i, u) + (1-q)V_{i+1}(x_1, ..., x_i, d))$$

und schließlich

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(qV_1(u) + (1-q)V_1(d))$$

Diese Rekursion kann man auch in der Form

$$V_i = e^{-r\Delta t}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_{i+1}|\mathcal{F}_i)$$

angeben.

2.3 Exkurs: Ito-Döblin Lemma diskret

▶ Stochastische Analysis (Analysis mit der Brown'schen Bewegung (BB)) ist kompliziert. Wir wollen also zwar das Ito-Integral umgehen. Die partielle Differentialgleichung von Black-Scholes-Merton wollen wir aber trotzdem herleiten. Wir benötigen dafür das folgenden **Ito-Döblin für Arme**.

2.3.1 Definition: Es sei I ein Intervall mit $0 \in I$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung vom . Wir sagen $g = o(h)$, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

2.3.2 Definition: Es sei z_k eine **symmetrische Bernoulli** Zufallsvariablen mit $\mathrm{Bild}(z_k) = \{-1, 1\}$ und $\mathbb{P}(z_k = 1) = \mathbb{P}(z_k = -1) = \frac{1}{2}$. Wir schreiben dann $z_k \sim \mathrm{SymBern}$.

2.3.3 Satz (Ito-Doblin-Lemma): Es sei $f = f(t, S)$ eine Funktion von t und S. f sei zweimal stetig differenzierbar bezüglich S und einmal stetig differenzierbar bezüglich t.

Der Kurs S_t erfülle die Differenzengleichung

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z,\ z \sim \mathrm{iiSymBern}$$

Wir suchen a und b, so dass:

$$\Delta f = a \cdot \Delta t + b \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z + o(\Delta t).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta f(S,t) &= (\mu \cdot S \cdot f'_S(S,t) + f'_t(S,t) + \frac{1}{2} f''_{SS}(S,t) \cdot \sigma^2 \cdot S^2) \cdot \Delta t \\ &\quad + \sigma \cdot S \cdot f'_S(S,t) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z \\ &\quad + o(\Delta t)\end{aligned}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta S \cdot \Delta t &= (\mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z) \cdot \Delta t \\ &= (\mu \cdot S \cdot (\Delta t)^2 + \sigma \cdot S \cdot (\Delta t)^{3/2} \cdot z) = o(\Delta t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta S)^2 = \Big(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z\Big)^2 &= \mu^2 \cdot (\Delta t)^2 + 2\mu\sigma S \cdot (\Delta t)^{1\frac{1}{2}} \cdot z \\ &+ \sigma^2 S^2 \cdot \Delta t \cdot \underbrace{z^2}_{=1} \\ &= \sigma^2 S^2 \cdot \Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

Für eine Approximation von $\Delta f(S,t)$ mit einem Fehler von der Ordnung $o(\Delta t)$ benötigen wir also nur die Terme der Ordnung $\Delta t, \Delta S$ und $(\Delta S)^2$. Also gilt

$$\Delta f(S,t) = f_t'(S,t)\Delta t + f_S'(S,t)\Delta S + \frac{1}{2} f_{SS}''(S,t)(\Delta S)^2 + o(\Delta t).$$

Wenn wir noch ΔS und Δt einsetzen.

$$\begin{aligned}\Delta f(S,t) = {} & f_S'(S,t)[\mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot z] \\ & + f_t'(S,t)\Delta t + \frac{1}{2} f_{SS}''(S,t) S^2 \sigma^2 \cdot \Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen.

2.3.4 Lemma: Es sei $\Delta X = \sqrt{\Delta t} \cdot z$. Dann $(\Delta X)^2 = \Delta t$.

Für die Brown'sche Bewegung gibt es eine entsprechende Formel: $(dW)^2 = dt$. So einfach wie in unserem Fall ist die Bedetung dieser Formel jedoch nicht (siehe Shreve Remark (3.4.4))! So schön einfach ist es hier, weil wir uns mit

Bernoulli-Schocks $z \sim \text{symBern}$ begnügen.

2.4 MPFMM

Baustelle ....

3 Entscheidungstheoretische Basis

3.1 Präferenzen

Dieser Abschnitt orientiert sich an Föllmer und Schied [10, Kapitel 2]. In den beiden vorhergehenden Abschnitten haben wir Wertpapierbewertungsmethoden besprochen, die nicht – jedenfalls nicht explizit – auf die Wünsche und Sorgen der Anleger eingehen. Das ist überraschend: Wie kann es sein, dass die je nach Anleger variierende Aversion gegen Risiken für die Wertpapierbewertung irrelevant ist. In der Tat sind die Präferenzen der Anleger nicht irrelevant. In den vorhergehenden Kapiteln war die Preisentwicklung der Basiswertpapiere **exogen** vorgegeben. Die Bewertungsmethoden waren **relative Bewertungsmethoden**: Die Preise der Basiswerte werden als gegeben akzeptiert und daraus ergeben sich die Preise anderer Wertpapiere. Die Präferenzen werden erstens explizit benötigt, wenn man die Preise der Basiswertpapiere erklären will. Zweitens erweist sich die Analyse der Präferenzen in unvollständigen Finanzmärkte als nützlich. Das Intervall der fairen Preise eines Auszahlungsprofils ist in konkreten Anwendungen regelmäßig sehr groß. Wenn man zusätzlich zur Annahme der Arbitragefreiheit die Präferenzen des Anlegers modelliert, dann kann man für eine bedingte Auszahlung auf methodisch einwandfreiem Weg *einen* Preis – und nicht ein ganzes Intervall von Preisen – ermitteln. Drittens erhalten wir eine Herleitung des stochastischen Diskontfaktors auf der Grundlage der Entscheidungstheorie.

3.1.1 Definition: i.) Es sei $\mathcal{X} \neq \emptyset$ eine Menge. Eine **(binäre) Relation** R auf $\mathcal{X}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Für ein Paar mit $(x_1, x_2) \in R$ schreiben wir $x_1 R x_2$ und sagen, dass die Relation für x_1 und x_2 erfüllt ist (bzw. besteht).

ii.) Eine binäre Relation $\succeq$ heißt

ii1.) **transitiv**, falls: $x_1 \succeq x_2$ und $x_2 \succeq x_3$ impliziert $x_1 \succeq x_3$.

ii2.) **vollständig**, falls: für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ gilt $x_1 \succeq x_2$ oder $x_2 \succeq x_1$.

iii.) Eine binäre Relation $\succeq$ heißt **Präferenzrelation**, falls $\succeq$ vollständig und transitiv ist. Wenn $x_1 \succeq x_2$ gilt, dann sagen wir x_1 ist mindestens so gut wie x_2.

iv.) Für eine Präferenzrelation $\succeq$ definieren wir die Relation $\succ$ durch

$$x \succ y \Leftrightarrow y \not\succeq x.$$

$\succ$ heißt **strenge Präferenzrelation** und durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ und } y \succeq x$$

die Relation $\sim$. Man kann sich leicht vergewissern, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. $\sim$ heißt **Indifferenzrelation**.
v.) Wenn es eine Funktion $U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y),$$

gibt, dann heißt U eine **numerische Darstellung der Präferenzen**. In diesem Fall nennt man U auch **Nutzenfunktion**.

3.1.2 Satz: Es gibt genau dann eine numerische Darstellung der Präferenzen $\succeq$, wenn es eine **abzählbare** ordnungsdichte Teilmenge $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{X}$ gibt.

Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ heißt **ordnungsdicht**, falls es für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ mit $x_2 \succ x_1$ ein $z \in \mathcal{Z}$ mit $x_2 \succeq z \succeq x_1$ gibt.

Wenn $\mathcal{X}$ abzählbar ist, dann gibt es für jede Präferenzrelation eine numerische Darstellung.

▶ In der Mikroökonomie (bei einer mathematischen Ausrichtung) untersucht man die gerade eingeführten Konzepte gründlich und erhält viele schöne Resultate. Da wir diese Resultate hier und im Folgenden nicht benötigen verweisen wir auf Kreps [23].

3.1.3 Definition: i.) Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{L}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bezeichnen wir (auch) als **Lotterie**.

Ein Dirac Wahrscheinlichkeitsmaß δ_ω bezeichnen wir als **konstante Lotterie**.

ii.) Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{M}$ eine konvexe Teilmenge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Es sei $\succeq$ eine Präferenzordnung auf $\mathcal{M}$ mit numerischer Darstellung $U : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Wenn es eine messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$U(\mathbb{L}) = \int u(\omega)\, d\mathbb{L}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u)$$

gibt, dann heißt diese Darstellung eine **von-Neumann-Morgenstern Darstellung** der Präferenzen $\succeq$.

Der numerische Wert ergibt sich also als der Erwartungswert des Nutzens unter dem Maß $\mathbb{L}$. In diesem Fall nennen wir $U(\mathbb{L})$ **Erwartungsnutzen** und u **Nutzenfunktion**. Wenn Entscheidungen auf Basis des Erwartungsnutzen modelliert werden, dann sagt man, dass die Entscheidungen auf Basis des **Bernoulliprinzips** getroffen werden.

3.2 Finanzlotterien

3.2.1 Bemerkung: Wir werden Präferenzen auf Wahrscheinlichkeitsmaßen betrachten. Wie im Kapitel 1 betrachten wir das Experimente mit den Ergebnissen $\{50, 70, 75, 80, 100\} \subset \mathbb{R} = \Omega$. Wir hatten uns insbesondere mit den Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{L}_1(\{50\}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{L}_1(\{100\}) = \frac{1}{2}$ beschäftigt und argumentiert, dass der Erwartungswert als Grundlage für Entscheidungen ungeeignet ist. Beim Bernoulli Prinzip sind **nicht die Erwartungen über die Ergebnisse relevant**; also z.B. $\mathbb{E}^{\mathbb{L}_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\omega))$. Vielmehr orientiert sich die Entscheidung an den Erwartungen **bezüglich des Nutzens aus den Ergebnissen**, d.h. $\mathbb{E}^{\mathbb{L}_1}(u(\omega))$. Eine *populäre* Wahl für u ist – aus Gründen, die wir später erkennen werden – der Logarithmus, d.h. $u(\omega) = \ln(\omega)$. Für die Modellierung von Präferenzen würden wir uns dann an $\mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u(\omega))$ für $\mathbb{L}$ aus $\mathcal{M}$ orientieren.

Wir hatten außer $\mathbb{L}_1$ noch ein zweites Wahrscheinlichkeitsmaß betrachtet: $\mathbb{L}_2(\{70\}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{L}_1(\{80\}) = \frac{1}{2}$. Jetzt gilt $\mathbb{E}^{\mathbb{L}_1}(X) = 75 = \mathbb{E}^{\mathbb{L}_2}(X)$ aber $\mathbb{E}^{\mathbb{L}_1}(u(X)) = 4.258597 < 4.315261 = \mathbb{E}^{\mathbb{L}_2}(u(X))$. So ist also in der Tat die zweite Lotterie besser als die erste; bei gleichem Erwartungswert. Wir werden´im Folgenden sehen, dass man auf diese Weise – mit dem Bernoulli-Prinzip (Nutzenfunktion, Erwartungsnutzen) – eine potente Methode zur Erfassung von Risikoaversion erhält.

► Im folgenden betrachten wir nicht irgendwelche Ergebnismenge $\mathcal{X}$, sondern Lotterien für monetäre Ergebnisse in $\mathbb{R}$.

3.2.2 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

i.) Eine Lotterie – also ein Wahrscheinlichkeitsmaß – auf

$(S, \mathcal{B}_S)$ heißt **Finanzlotterie** oder **monetäre Lotterie**.

ii.) Gilt für eine Finanzlotterie $\mathbb{L}$ zudem

$$\mathcal{E}(\mathbb{L}) := \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(\mathrm{id}_S) = \int s\, d\mathbb{L}(s) = \int s\, dF(s) \in \mathbb{R},$$

dann heißt $\mathbb{L}$ eine **integrierbare Finanzlotterie**. Wir nennen $\mathcal{E}(\mathbb{L})$ den **Erwartungswert der Lotterie** $\mathbb{L}$.

Hier muss man beachten, dass der Erwartungswert eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{L}$ definiert wird. Standardmäßig definiert man den Erwartungswert einer Zufallsvariable. Auch in der obigen Gleichung kommt eine Zufallsvariable vor, viz. $\mathrm{id}_S(\cdot)$. Die „unabhängige Variable“ in der obigen Definition ist jedoch $\mathbb{L}$.

3.2.3 Definition: Es sei $(S, \mathcal{B}_S)$ ein Intervall und $\mathcal{M}$ eine konvexe Menge von integrierbaren Finanzlotterien, die die Menge der konstanten Finanzlotterien enthält.

i.) Eine Präferenzrelation $\succeq$ heißt **monoton**, falls für alle $x > y$ auch $\delta_x \succ \delta_y$ gilt.

ii.) Eine Präferenzrelation $\succeq$ heißt **risikoavers**, wenn für alle nicht-konstanten Finanzlotterien $\mathbb{L} \in \mathcal{M} \backslash \{\delta_x : x \in S\}$

$$\delta_{\mathcal{E}(\mathbb{L})} \succ \mathbb{L}$$

gilt.

3.2.4 Bemerkung: Wenn $\mathbb{L} = \delta_x$, dann $x = \mathcal{E}(\mathbb{L})$.

3.2.5 Satz: Für die Präferenzrelation $\succeq$ gelte die von-Neumann-Morgenstern Darstellung

$$U(\mathbb{L}) = \int u(s)\, d\mathbb{L}(s) = \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u).$$

Dann gilt:

i.) $\succeq$ ist genau dann monoton, wenn u strikt monoton wachsend ist.
ii.) $\succeq$ ist genau dann risikoavers, wenn u ist strikt konkav ist.

Beweis: Föllmer und Schied [10].

3.2.6 Definition: Es sei $(S, \mathcal{B}_S)$ ein Intervall und $\mathcal{M}$ eine konvexe Menge von integrierbaren Finanzlotterien, die die Menge der konstanten Finanzlotterien enthält. Ferner sei $\succeq$ eine Präferenzrelation mit von-Neumann-Morgenstern Darstellung

$$U(\mathbb{L}) = \int u(s)\, d\mathbb{L}(s)$$

mit einer strikt monoton wachsenden und stetigen Funktionen $u : S \to \mathbb{R}$.

i.) Die eindeutig bestimmte Lösung $c(\mathbb{L})$ der Gleichung

$$u(c(\mathbb{L})) = \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u)$$

heißt das **Sicherheitsäquivalent** der Finanzlotterie $\mathbb{L}$. Es gilt

$$c(\mathbb{L}) = u^{-1}(\mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u))$$

ii.) Die Differenz $\varrho(\mathbb{L}) = \mathcal{E}(\mathbb{L}) - c(\mathbb{L})$ heißt **Risikoprämie** von $\mathbb{L}$.

3.2.7 Bemerkung: Es sei $\succeq$ eine Präferenzordnung auf $(S, \mathcal{B}_S)$ mit von-Neumann-Morgenstern Darstellung $U(\mathbb{L}) = \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u)$, wobei u zweimal stetig differenzierbar sei. Wir setzen $m = \mathcal{E}(\mathbb{L}), c = c(\mathbb{L})$. Dann gilt einerseits

$$u(c) \approx u(m) + u'(m)(c - m) = u(m) - u'(m)\varrho$$

und andererseits

$$u(c) = \mathbb{E}^{\mathbb{L}}(u) \approx \mathbb{E}^{\mathbb{L}}\left[u(m) + u'(m)(x - m) + \frac{1}{2}u''(m)(x - m)^2\right] \tag{3.1}$$

$$= u(m) + \frac{1}{2}u''(m)\mathbb{V}(\mathbb{L}) \tag{3.2}$$

Zusammen: $\varrho \approx -\frac{1}{2}\frac{u''(m)}{u'(m)}\mathbb{V}(\mathbb{L})$. Diese Näherung heißt **Arrow-Pratt-Approximation** der Risikoprämie.

An dieser Darstellung erkennt man sehr gut die *Quellen* der Risikoprämie: (1) *Objektives* Risiko (hier gemessen durch die Varianz) und (2) *Risikoneigung* (hier gemessen durch die Krümmung $\frac{u''(m)}{u'(m)}$ der Nutzenfunktion).

3.2.8 Definition: Die Funktion $u : S \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und strikt wachsend. Dann heißt

$$\alpha(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

der **Arrow-Pratt-Koeffizient der absoluten Risikoaversion** von u an der Stelle x.

3.2.9 Bemerkung: Wir bemerken, dass

$$\alpha(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{\frac{du'}{dx}}{u'}.$$

Also erfasst $\alpha(x)$ die prozentuale (relative) Änderung des Grenznutzen u' , wenn sich x um eine kleine Einheit ändert.

Der Koeffizient misst die Krümmung der Nutzenfunktion. Würde man nur $u''(x)$ als Maß der Risikoaversion verwenden, so wäre dieses Maß nicht invariant bezüglich affiner Transformation. Da sich bei affinen Transformation die Präferenzen nicht ändern, sollte auch ein Maß für die Risikoaversion invariant bezüglich affiner Transformationen sein.

3.2.10 Bemerkung: i.) Für den Fall, dass $\alpha(x) \equiv \alpha$ gilt, kann man nachweisen, dass u von der Form

$$u(x) = a - be^{-\alpha x}$$

ist. Funktionen diesen Typs heißen CARA-Funktionen (Constant Absolut Risk Aversion).

ii.) Für den Fall, dass für den Koeffizienten der absoluten Risikoaversion $\alpha(x) = \frac{\gamma}{x}, x \in S = (0, \infty)$ mit einer Konstanten $\gamma > 0$ gilt, kann man nachweisen, dass – bis auf eine affine Transformation – die Nutzenfunktion von der Form

$$u(x) = \log(x), \text{falls } \gamma = 1 \tag{3.3}$$

$$u(x) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}, \text{falls } \gamma \neq 1 \tag{3.4}$$

ist. Funktionen diesen Typs CoRRA-Nutzen-Funktionen (Constant Relative Risk Aversion).[1] Wir bemerken

$$\gamma = \alpha(x)x = -\frac{du'}{dx}\frac{x}{u'}.$$

Also erfasst γ die prozentuale Änderung des Grenznutzens u', wenn sich x um 1 Prozent ändert.

3.3 u-Optimale Portfolio und SDF

3.3.1 Bemerkung: Wir betrachten die Entscheidung eines Investors, der sein Anlagevermögen $w_0 > 0$ entweder risikolos zum Zins i oder riskant mit Rendite R anlegen kann (R ist eine Zufallsvariable). Das **Endvermögen** ist

[1] Üblich ist die Abkürzung CRRA. Ein Student hat CoRRA vorgeschlagen.

die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} V &= (1+i)h_0 + (1+R)h_1 \\ h_0 + h_1 &= w_0 \end{aligned}$$

wobei $h_0 \geq 0$ der risikolos angelegte und $h_1 \geq 0$ der riskant angelegte Betrag ist.

Wir können die Restriktion $h_0 + h_1 = w_0$ verwenden, um das Optimierungsproblemen auf ein Problem mit einer Kontrollvariable zu reduzieren:

$$\begin{aligned} V &= (1+i)w_0 + Xh_1 \\ X &= R - i. \end{aligned}$$

Wir unterstellen, dass es für die Präferenzen eine sogenannte **von-Neumann-Morgenstern** gibt:

$$\mathbb{E}(u(V)) = \mathbb{E}(u((1+i)w_0 + Xh_1)).$$

Wir unterstellen dabei, dass $u : S \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, strikt konkav und strikt monoton steigend ist. Ferner unterstellen wir, dass stets $V \in S$ gilt und $u(V)$ für alle h_1 integrierbar ist. Zur Analyse des Optimierungsproblem betrachten wir

$$H(h_1) = \mathbb{E}\left[u((1+i)w_0 + Xh_1)\right].$$

Dann ist H strikt konkav und stetig auf $[0, w_0]$ ist.

Wie zuvor betrachten wir die erste Ableitung:

$$H'(h_1) = \mathbb{E}\left[u'((1+i)w_0 + Xh_1)\, X\right],$$

wobei wir voraussetzen, dass H differenzierbar ist (die Differentiation und der Erwartungswert können vertauscht werden).

Dann gilt

$$H'(0) = \mathbb{E}\left[u'((1+i)w_0)\, X\right] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(R) = i.$$

Weiterhin

- Wenn $\mathbb{E}(R) > i$, dann $H'(0) = \mathbb{E}\left[u'((1+i)w_0)\, X\right] = u'((1+i)w_0)\mathbb{E}\left[X\right] > 0$. Unter der Bedingung $\mathbb{E}(R) > i$ wird der Investor einen positiven Betrag riskant anlegen.

- Gilt jedoch $\mathbb{E}(R) \leq i$ gilt, so ist $h_1 = 0$ optimal, d.h. der Anleger legt sein Vermögen komplett risikolos an.

3.3.2 Beispiel: Für die Präferenzen eines Investors gebe es eine vNM-Darstellung mit $u(s) = \ln(s), s \in S = (0, \infty)$. Der Investor kann in eine riskante Anlageform mit Rendite R investieren, wobei $R = R^u$ mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ und $R = R^d$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Zudem kann der Investor Geld risikolos zum Zins i anlegen. Dabei soll $R^d < i < R^u$ gelten.

Dann gilt

$$h_1^* = (1+i) \cdot \frac{\mathbb{E}(R-i)}{(R^u - i)(i - R^d)} \cdot w_0.$$

3.3.3 Bemerkung: Wir wollen jetzt unterstellen, dass das Portfolioproblem eine innere Lösung $h_1^* > 0$ hat, die durch die Bedingung erster Ordnung

$$\mathbb{E}\left[u'((1+i)w_0 + Xh_1^*)\, X\right] = 0$$

charakterisiert ist. Dann gilt

$$S_0 = \mathbb{E}\left[\frac{\xi}{1+i} S_1\right] = \mathbb{E}\left[mS_1\right] \quad ,$$

wobei $\xi = \frac{u'(V_1^*)}{\mathbb{E}\left[u'(V_1^*)\right]}$ und $m = \frac{\xi}{1+i}$.

Die Gleichung $S_0 = \mathbb{E}\left[mS_1\right]$ kennen wir insbesondere aus dem EPFMM. Ein solches m heißt **stochastischer Diskontfaktor**. Wir erhalten somit eine Herleitung des stochastischen Diskontfaktors m auf der Grundlage der Entscheidungstheorie.

4 Portfoliooptimierung

4.1 μ-σ-optimale Portfolios

4.1.1 Bemerkung: In diesem Abschnitt werden sogenannte μ-σ-optimale Portfolios besprochen (μ steht für die erwartete Rendite und σ für die Standardabweichung der Rendite). Sehr gute Überblicke zur Mathematik der μ-σ-optimalen Portfolios geben Back [1, Kapitel 5] und Roll [38]. Die originären Arbeiten zu diesem Thema stammen von Markowitz [31, 32].

4.1.2 Definition, Notation und Bemerkungen: i.) Ein **Portfolio** ist ein Vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$. Dabei erfasst h_i die **Stücke (Anzahl)** der vom Wertpapier mit der Nummer i gehaltenen Wertpapiere. Leerverkäufe $h_i < 0$ sind zugelassen.

ii.) Ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ mit $\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1$ (also $\sum_{i=1}^N w_i = 1$) heißt **Anteilsvektor**. Wir werden unten regelmäßig **Anteilsvektoren** betrachten, die sich auf **ein Portfolio h**

beziehen. In diesem Fall haben wir

$$w_i = \frac{h_i V_0^i}{\sum_{j=1}^N h_j V_0^j}. \tag{4.1}$$

V_0^i bezeichnet den Preis des Wertpapiers mit der Kennnummer i zum Betrachtungszeitpunkt $t = 0$; wir verwenden einen Superindex um das Wertpapier anzugeben und den Index für den zeitlichen Bezug. In diesem Fall werden wir aus sachlogischen Gründen $V_0^i > 0, i = 1, ..., N$ voraussetzen.
iii.) Eine **Rendite** ist eine quadrat-integrierbare Zufallsvariable $R : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, die sich in der Form

$$R = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad V_0 > 0$$

schreiben lässt. Die Rendite eines Wertpapiers heißt in diesem Kapitel **riskant**, falls $\mathbb{V}(R) > 0$ ist. $V_0 > 0$ bezeichnet den Preis des Wertpapiers zum Betrachtungszeitpunkt und V den Preis am Ende des Anlagehorizonts $t = 1$, wobei wir den Index für den Zeitpunkt weglassen.

4.1.3 Bemerkung: i.) Alle Zufallsvariablen sind auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.
ii.) Für die Renditen dieses Kapitels unterstellen wir stets $V, R, V^i, R^i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Also existieren Erwartungswerte, Varianzen und die Kovarianzen.
iii.) Eine **Rendite** ist also ein Quotient der Form $R = (V - V_0)/V_0$, $V_0 > 0$. Im folgenden werden wir Resulta-

te (Formeln) präsentieren, die sich auf Renditen beziehen. Für diese Resultate ist es dabei manchmal irrelevant, dass R sich als Quotient schreiben lässt. Trotzdem wird in den Sätzen der Ausdruck Rendite verwendet, da dies die im Fokus stehende Anwendung ist.

iv.) Im folgenden werden wir Resultate (Formeln) präsentieren, die sich auf Anteilsvektoren beziehen. Für diese Resultate ist es dabei manchmal irrelevant, dass es sich um Anteilsvektoren handel, d.h. einige Resultate gelten auch für Vektoren ohne eine Darstellung der Form (4.1).

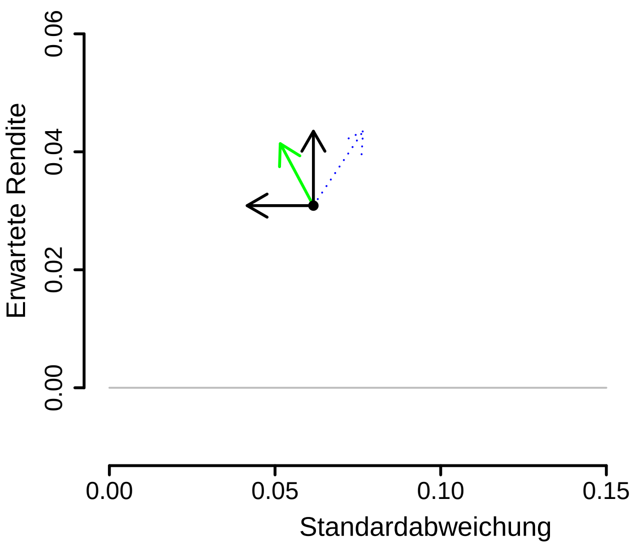


Abbildung 4.1.1: Besserrichtung. Die Abbildung zeigt drei uniforme Besserrichtungen und eine Richtung dessen Einschätzung von der Risikoneigung des Anlegers abhängt.

4.1.4 Bemerkung: Wir untersuchen in diesem Kapitel die folgende Situation. Anleger können in N Wertpapiere

(WPe) investieren, die durch ihre Renditen $(R^1, ..., R^N)^T$ charakterisiert sind. Gegebenenfalls gibt es auch eine risikofreie Anlageform mit fester Rendite $R^f \in \mathbb{R}$. Wir unterstellen dabei, dass die Anleger von den Renditen nur den Erwartungswert (die erwartete Rendite) und die Varianz (oder Standardabweichung) beachten. Genauer: Haben zwei Anlageformen (Wertpapiere, Geldmarktkonto, Portfolios, ...) die gleiche Varianz, dann wird jenes vorgezogen, dass eine höhere erwartete Rendite hat. Haben zwei Anlageformen die gleiche erwartete Rendite, dann wird jenes vorgezogen, dass die geringere Varianz hat. Die Präferenzen von μ-σ-Anleger sind in der Abbildung 4.1.1 angedeutet. Ausgehend vom schwarzen Punkt zeigen die schwarzen und der grüne Pfeil in Richtungen, die **von allen** μ-σ-Anlegern bevorzugt werden. Ob ein bestimmter Anleger die Bewegung in Richtung des blauen Pfeils als eine Verbesserung empfindet, hängt hingegen von seiner Risikoneigung ab. Obwohl wir diese Risikoneigung nicht konkreter spezifizieren, können wi weitreichende Resultate ableiten.

4.1.5 Satz: Gegeben seien die Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ von $N \in \mathbb{N}$ Wertpapieren. Ein Investor sei im Portfolio $\mathbf{h}$ engagiert und es sei

$$w_i = \frac{h_i V_0^i}{\sum_{j=1}^N h_j V_0^j} = \frac{h_i V_0^i}{V_0},$$

wobei $V_0^j > 0, j = 1, ..., N, V_0 > 0$. $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_N)^T$ ist der Anteilsvektor des Portfolios $\mathbf{h}$. Dann **gilt** für die

Rendite
$$R = \frac{V - V_0}{V_0}$$
des Gesamtwertes $V = h_1 V^1 + ... + h_N V^N$ zum Portfolios $\mathbf{h}$.

$$R = \frac{V - V_0}{V_0} = \sum_{i=1}^{N} w_i R^i = \mathbf{w}^T \mathbf{R} =: R^{\mathbf{w}} \quad .$$

► Der folgende Hilfssatz enthält Aussagen und Formel, die aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt sind.

4.1.6 Hilfssatz: i.) Gegeben sei der Zufallsvektor $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Dann ergibt sich für

$$R^{\mathbf{v}} := \sum_{i=1}^{N} v_i R^i = \mathbf{v}^T \mathbf{R}$$

der Erwartungswert und die Varianz als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R^{\mathbf{v}}) &= \sum_{i=1}^{N} v_i \mathbb{E}(R^i) = \mathbf{v}^T \mathbb{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbb{V}(R^{\mathbf{v}}) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} v_i v_j \Sigma_{ij} = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

ii.) Gegeben seien ein Renditevektor $\mathbf{R}$ und Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^N$. Es sei

$$R^{\mathbf{v}_i} := \mathbf{v}_i^T \mathbf{R}, i = 1, 2.$$

Dann ist

$$\text{cov}(R^{\mathbf{v}_1}, R^{\mathbf{v}_2}) = \mathbf{v}_1^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{v}_2.$$

iii.) Gegeben seien die Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ von $N \in \mathbb{N}$ riskanten Wertpapieren. Dann gilt für die Rendite $R^{\mathbf{w}}$ eines Portfolios mit Anteilsvektor $\mathbf{w}$, dass

$$\text{cov}(\mathbf{R}, R^{\mathbf{w}}) = \begin{pmatrix} \text{cov}(R^1, R^{\mathbf{w}}) \\ \vdots \\ \text{cov}(R^N, R^{\mathbf{w}}) \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{w}.$$

4.1.7 Bemerkung: Wegen der letzten beiden Bemerkungen können wir also die erwartete Rendite und die Varianz der Rendite eines Portfolios mit Anteilsvektor $\mathbf{w}$ mit den Formeln

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R^{\mathbf{w}}) &= \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}(R^i) = \mathbf{w}^T \mathbb{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \Sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

bestimmen.

Besonders wichtig ist auch die Beobachtung, dass **die erwartete Rendite eines Portfolios und die Varianz der Rendite eines Portfolios unabhängig von der insgesamt eingesetzten Investitionssumme sind (Skalenfreiheit).**

▶ Der folgenden Satz beschreibt das konservativste Portfolio aus riskanten Wertpapieren.

4.1.8 Satz: Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ mit den Renditen von $N \in \mathbb{N}$ riskanten Wertpapieren. Die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{\Sigma} \in M(N, N, \mathbb{R})$ sei positiv definit. Dann hat das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{u.d.N} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \tag{4.2}$$

die Lösung

$$\mathbf{w}^{\text{gvm}} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}. \tag{4.3}$$

Beweis: Für den Beweis verwendet man die Methode von Lagrange. Vgl. Back [1, S. 82-83]. □

4.1.9 Bemerkung: Varianz-Kovarianz Matrizen sind stets positiv semidefinit. Die Voraussetzung, dass $\mathbf{\Sigma}$ sogar positiv definit ist, impliziert, dass $\mathbf{\Sigma}$ invertierbar ist. Ferner folgt, dass es nicht möglich ist, aus den riskanten Wertpapieren ein Portfolio zu bilden, dass risikofrei ist. Dieser wohlbekannte Sachverhalt wird im folgenden Lemma festgehalten und bewiesen.

4.1.10 Lemma: Gegeben seien die Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ von $N \in \mathbb{N}$ riskanten Werpapieren. Die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{\Sigma}$ der Renditen sei positiv definit. Dann gibt es kein nicht-triviales Portfolio aus diesen Wertpapieren, dessen Rendite risikofrei ist.

Beweis: Es sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Varianz der Rendite $R^{\mathbf{w}}$, $\mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}$. Aus $\mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) = 0$ folgt $\mathbf{w} = 0$ [da $\mathbf{\Sigma}$ positiv definit ist]. Also ist das Nullportfolio das einzige Portfolio mit Varianz Null.

4.1.11 Definition: Gegeben seien die Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ von $N \in \mathbb{N}$ riskanten Werpapieren. Die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{\Sigma}$ der Renditen sei positiv definit. Ein Portfolio mit Anteilsvektor

$$\mathbf{w}^{\text{gvm}} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$$

nennen wir **gvm-Portfolio** (gvm für global varianzminimal).

4.1.12 Bemerkung: Wenn ein Anleger **nur** auf **Risikovermeidung** fokussiert ist und das Risiko durch die Varianz erfasst wird, dann ist das gvm-Portfolio für diesen Anleger optimal.

► Der folgende Satz betrachtet die Aufgabe unter allen Portfolio mit einer **Zielrendite** μ^*, dasjenige Portfolio zu ermitteln, das eine **minimale** Varianz hat. Dieses Portfolio hat typischerweise[1] eine höhere Varianz als das gvm-

[1] Immer dann, wenn die Zielrendite von der Rendite des gvm-Portfolio abweicht, ist die Varianz des ermittelten vm-Portfolios größer.

Portfolio.

4.1.13 Satz (Grenzportfolio bzw. varianzminimale Portfolio): Gegeben seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$, wobei $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{R})$ linear unabhängig von $\mathbf{1}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ positiv definit ist. Dann ist

$$\mathbf{w}^{\text{vm}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}\mathbf{M}\mathbf{B}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}^*$$

der Anteilsvektor des varianzminimalen Portfolios mit erwarteter Rendite μ^*. Das Portfolio $\mathbf{w}^{\text{vm}}$ löst also das Optimierungproblem

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^N} \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \quad \text{u.d.N} \quad \mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1, \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = \mu^*.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\boldsymbol{\mu} \vdots \mathbf{1}) \in M(N, 2, \mathbb{R}) \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* &= (\mu^*,\ 1)^T \in M(2, 1, \mathbb{R}) \\ \mathbf{B} &= \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{M} \in M(2, 2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

vm steht für **varianzminimal**.

Beweis: Der Beweis basiert wieder auf der Methode von Lagrange (vgl. Zivot [52, S. 15]).

4.1.14 Bemerkung: Die Bedingung, dass $\mathbf{1}$ linear unabhängig von $\boldsymbol{\mu}$ ist, bedeutet, dass die erwarteten Renditen nicht alle übereinstimmen.

4.1.15 Satz, Definitionen und Bemerkungen (Grenzportfoliohyperbel): Gegeben seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$, wobei $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{R})$ linear unabhängig von $\mathbf{1}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ positiv definit ist. Definiere

$$A = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, B = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}, C = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

Dann ist

$$\sigma^2_{R^{\mathbf{w}}} \quad = \quad \frac{A - 2B\mu_{R^{\mathbf{w}}} + C\mu^2_{R^{\mathbf{w}}}}{AC - B^2} \tag{4.4}$$

die Varianz der **Grenzportfolio** mit erwarteter Rendite $\mu_{R^{\mathbf{w}}}$.

Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \mu \mapsto \left(\frac{A - 2B\mu + C\mu^2}{AC - B^2}, \mu \right)^T$$

definiert eine Kurve in der σ-μ-Ebene, die die Gestalt einer um 90 Grad gedrehten Parabel hat. Die Kurve heißt **Grenzportfolioparabel**. Die Kurve

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \mu \mapsto \left(\sqrt{\frac{A - 2B\mu + C\mu^2}{AC - B^2}}, \mu \right)^T$$

heißt **Grenzportfoliohyperbel**.

Für $\mu \neq \frac{B}{C}$ ist die Steigung der Grenzportfoliohyperbel

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma}}{\frac{\partial F}{\partial \mu}},$$

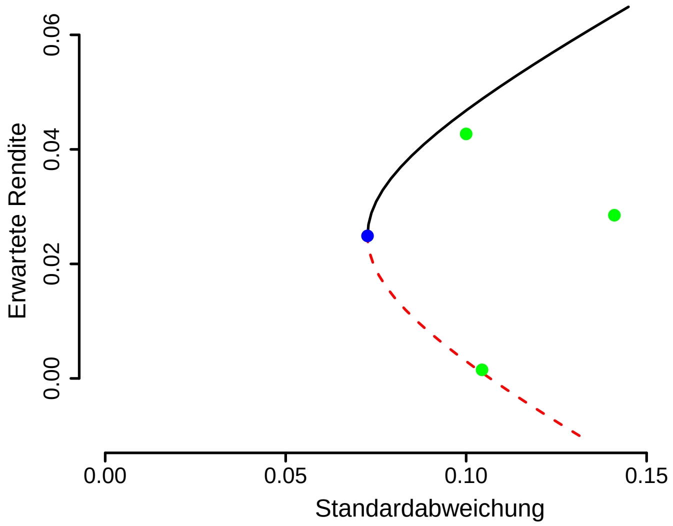


Abbildung 4.1.2: Eine Grenzportfoliohyperbel. Die Portfolios die zu dem schwarzem Arm gehören heißen effizient. Die, die zum rotem Arm gehören, ineffizient. Die grünen Punkte gehören zu den drei gegebenen Wertpapieren aus den Portfolio gebildet werden können.

wobei

$$F(\mu, \sigma) = \frac{A - 2B\mu + C\mu^2}{AC - B^2} - \sigma^2.$$

Also ist die Steigung der Grenzportfoliohyperbel

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\sigma(AC - B^2)}{C\mu - B} \enspace .$$

4.1.16 Bemerkung: Die Abbildung 4.1.2 zeigt exemplarisch eine Grenzportfoliohyperbel. Die μ-σ auf dem durchgezogenen schwarzen Arm gehören zu den **effizienten Portfolio**. Auch die Portfolios, die zu dem gestrichelten Arm gehören sind Grenzportfolio; diese Portfolio heißen **ineffizient**. Ein μ-σ-Anleger würde – wenn seine Wahl auf die riskanten Wertpapiere beschränkt ist stets effiziente Grenzportfolio wählen, da diese so weit wie möglich im Nord-Westen liegen. Wie wir gesehen haben sind dies die Besserrichtungen.

4.1.17 Bemerkung: Wir betrachten den Fall mit $N = 2$. Dann ist der Anteilsvektor von der Form $\mathbf{w} = (w, 1 - w)$. Für die erwartete Rendite erhalten wir

$$\mathbb{E}(R^{\mathbf{w}}) = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$$

und für die Varianz gilt

$$\mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) = w^2\sigma_1^2 + 2w(1 - w)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - w)^2\sigma_2^2, \quad (4.5)$$

$$\rho = \operatorname{cov}(R^1, R^2)/(\sigma_1\sigma_2). \quad (4.6)$$

Wenn wir eine Zielrendite μ^* vorgeben, dann können wir w explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} \mu^* &= w\mu_1 + (1 - w)\mu_2 = w(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \\ \Leftrightarrow \quad w &= \frac{\mu^* - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}. \end{aligned}$$

Wenn man dieses w in die Varianzformel einsetzt, dann erhält man

$$\begin{aligned} \sigma_{R^{\mathbf{w}}}^2 = \mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) = & \left(\tfrac{\mu^*-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\tfrac{\mu_1-\mu^*}{\mu_1-\mu_2}\right)^2 \sigma_2^2 \quad (4.7) \\ & +2\left(\tfrac{\mu^*-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\right)\left(\tfrac{\mu_1-\mu^*}{\mu_1-\mu_2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Für diesen Fall und in dieser Form erkennt man ganz unmittelbar, dass die Grenzportfolio in der μ^*-$\sigma_{R^{\mathbf{w}}}^2$ eine Parabel bilden (das wussten wir aber schon aus Satz 4.1.15). Die Darstellung zeigt auch den Einfluss der Korrelation ρ auf die Form der Kurve der Grenzportfolio. In der Abbildung 4.1.3 sind zwei Wertpapiere WP 1 und WP 2 mit $\mu_1 = 0.14, \sigma_1 = 0.16, \mu_2 = 0.04, \sigma_1 = 0.08$ gegeben. Die Abbildung zeigt die Grenzportfolio für unterschiedliche ρ. Für $\rho = -1$ erhält man einen Kegel. In diesem Fall ist ein Hedge möglich, so dass die Varianz der Rendite des Portfolio Null wird (was kann man dann über Σ sagen?). Das ist natürlich keine Überraschung, denn wenn die Wertpapiere perfekt negativ korreliert sind, dann kann man ein Wertpapier mit dem anderen Wertpapier perfekt hedgen. Wir betrachten zunächst den Bereich zwischen μ_1 und μ_2. Für größere ρ verschlechtern sich hier die Hedging-Möglichkeiten. Die Hyperbel entfernt sich von der Ordinate. Wenn man den Bereich oberhalb von μ_1 betrachtet, dann erkennt man, dass die sich Hebelmöglichkeiten verbessern, wenn ρ größer wird.

An dieser Stelle merken wir an, dass für $N = 2$ die Wertpapiere selbst Grenzportfolio sind, d.h. die WP 1 und WP 2 liegen wie in der Abbildung 4.1.3 ersichtlich auf der Grenzportfoliohyperbel. So gilt das jedoch nur für $N = 2$.

4.1.18 Bemerkung: Bisher haben wir nur den Fall mit N riskanten Wertpapieren betrachtet. Im folgenden unterstellen wir, dass der Anleger auch Zugang zu einer risikolosen Anlageform hat. Darunter wird typischerweise eine

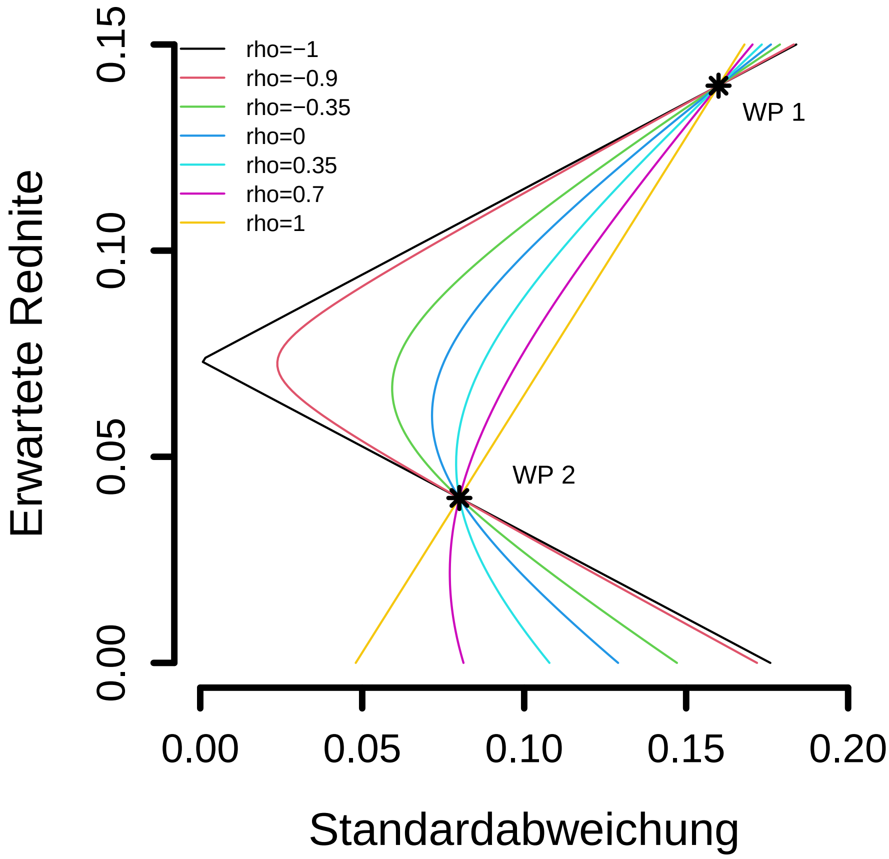


Abbildung 4.1.3: Unterschiedliche Rho. Die Abbildung zeigt die Grenzportfolio für unterschiedliche Korrelationen.

staatliche Anleihe mit höchster Bonität und mit passender Laufzeit verstanden. Wir werden sehen, dass man in diesem Fall die Anlageentscheidung gedanklich trennen kann. (1) Zunächst wird wie gehabt das riskante Anlage Universum betrachtet und es werden insbesondere die Grenzportfolio bestimmt (diese ist in der Abbildung 4.1.4 für drei WP angegeben). (2) Unter den riskanten Portfolio ist eines in Kombination mit der risikolosen Anlageform ausgezeichnet; nämlich das sogenannte Tangentialportfolio (dieses Portfolio ist in der Abbildung 4.1.4 eingetragen. Erkennen Sie das spezielle dieses Portfolio). Der Anleger kombiniert dann dieses Portfolio nach seinem Risiko-Gusto mit der risikofreien Anlage, d.h. der Anlieger bildet Portfolio aus dem Tangentialportfolio und der Anleihe. Alle μ-σ dieser Portfolio – ohne Leerverkäufe des Tangentialportfolio – liegen in der Abbildung auf der durchgezogenen Halbgeraden, die durch den roten und den blauen Punkt gehen. Portfolio, die oberhalb der Geraden liegen sind nicht erreichbar und Portfolio, die unterhalb der Geraden liegen, sind nicht optimal. Ein Anleger, der relativ risikoavers ist, würde ein Portfolio wie das durch den roten Stern markierte wählen, während der blaue Stern die Wahl eines weniger risikoaversen Anlegers markiert.

4.1.19 Definition und Notation: Es seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ gegeben sowie eine risikofreie Anlageform mit fixer Rendite $R^f \in \mathbb{R}$. Ein Portfolio aus den N riskanten Wertpapieren und der risikofreien Anlageform wird durch Angabe des Anteilsvektors $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ und dem Anteil $1 - \alpha$, der risikolos investiert ist, charakterisiert. Für den Anteilsvektor dieses Portfolio aus $N + 1$ Anlageformen schreiben wir $\bar{\mathbf{w}} = (\alpha w_1, ..., \alpha w_N, 1 - \alpha)^T$.

Wir bemerken, dass man einen Vektor $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^N$ mit $\alpha =$

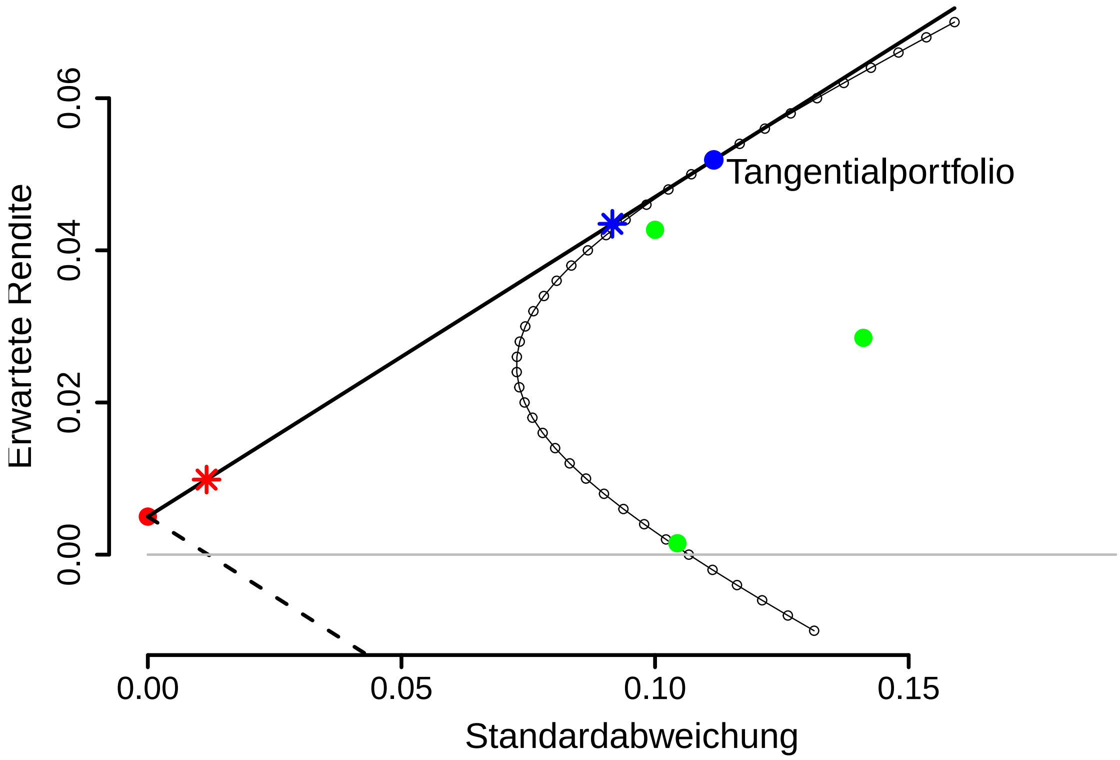


Abbildung 4.1.4: μ-σ-Diagramm zur Illustration der gedanklichen Trennung wie in dieser Bemerkung besprochen.
Quelle: Eigene Darstellung

$\sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i \neq 0$ (und i.A. $\alpha = \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i \neq 1$) in der Form

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{w}} &= (\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_n)^T \\ &= (\alpha\frac{\tilde{w}_1}{\alpha}, ..., \alpha\frac{\tilde{w}_N}{\alpha})^T \\ &= (\alpha w_1, ..., \alpha w_N)^T\end{aligned}$$

schreiben kann, wobei dann $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ gilt. Dann erfassen die w_i die Aufteilung des Vermögens, dass in riskante Wertpapiere angelegt ist, und z.B. $\sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i = \alpha > 1$ würde bedeuten, dass mehr als 100 Prozent des Anlagewertes in den N riskanten Wertpapieren investiert ist.

Einen Anteilsvektor $\bar{\mathbf{w}} = (\alpha w_1, ..., \alpha w_N, 1-\alpha)^T$ geben wir auch in der Form $(\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_N, 1-\alpha)^T$ an, wobei dann $\alpha = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i$. Wenn wir einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ als Anteilsvektor bezeichnen, obwohl $\mathbf{w}^T\mathbf{1} \neq 1$, dann meinen wir den Anteilsvektor $(\mathbf{w}^T, 1-\alpha)$.

Ist $\mathbf{w}$ der Anteilsvektor für die riskanten Wertpapiere $1, ..., N$ und $\bar{\mathbf{w}} = (\alpha w_1, ..., \alpha w_N, 1-\alpha)^T$ ein Anteilsvektor für das um die risikolose Anlageform erweiterte Portfolio. Dann gilt (natürlich)

$$
\begin{aligned}
(\alpha w_1, ..., \alpha w_N, 1-\alpha) \cdot \mathbf{1} &= 1 - \alpha + \sum_{i=1}^N \alpha w_i \\
&= 1 - \alpha + \alpha \sum_{i=1}^N w_i = 1.
\end{aligned}
$$

4.1.20 Beispiel: Es sei $\mathbf{w} = (0.7, 0.3)$ und $\alpha = 0.4$. Für das Portfolio gilt: 40% des Vermögens werden in zwei Wertpapiere investiert und 60 % am Geldmarkt angelegt. Von den 40 %, die in Wertpapiere investiert werden, werden 70 % in das erste Wertpapier investiert. In der oben geführten Notation $\bar{\mathbf{w}} = (0.4 \cdot 0.7, 0.4 \cdot 0.3, 0.6) = (0.28, 0.12, 0.6)$. Alternativ kann man das Portfolio auch durch den Vektor $\tilde{\mathbf{w}} = (0.28, 0.12)^T$ angeben. In diesem Fall muss man $\alpha = 0.28 + 0.12 = 0.4$ ausrechnen (mitdenken).

4.1.21 Satz: Es seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$ gegeben. Gegeben sei ferner ein risikoloses Wertpapiere mit Rendite R^f. Wir betrachten das Portfolio mit Anteilsvektor $\bar{\mathbf{w}} = (\alpha w_1, ..., \alpha w_N, 1-\alpha)$. Für die Rendite $R^{\bar{\mathbf{w}}}$ dieses Portfolios gilt:

$$
\begin{aligned}
R^{\bar{\mathbf{w}}} &= R^f \pm \frac{\sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}}}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}(R^{\mathbf{w}} - R^f) \\
\mathbb{E}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) &= R^f \pm \left(\frac{\mathbb{E}(R^{\mathbf{w}}) - R^f}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}\right) \cdot \sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}},
\end{aligned}
$$

wobei $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_N)^T$ der Anteilsvektor der riskanten Wertpapiere ist. Dabei gilt in den obigen Gleichungen $+$ für $\alpha > 0$ ist und $-$ für $\alpha < 0$.

Beweis: Für die Rendite $R^{\bar{\mathbf{w}}}$ gilt

$$
\begin{aligned}
R^{\bar{\mathbf{w}}} &= (1-\alpha)R^f + \alpha R^{\mathbf{w}} \\
R^{\mathbf{w}} &= \boldsymbol{w}^T \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

Für die Varianz des Portfolio gilt

$$\sigma^2_{R^{\bar{\mathbf{w}}}} = \mathbb{V}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) = \mathbb{V}((1-\alpha)R^f + \alpha R^{\mathbf{w}}) = \alpha^2 \mathbb{V}(R^{\mathbf{w}}) = \alpha^2 \sigma^2_{R^{\mathbf{w}}},$$

also $\sigma^2_{R^{\bar{\mathbf{w}}}} = \alpha^2 \sigma^2_{R^{\mathbf{w}}}$. Ist $\alpha > 0$, so gilt

$$\sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}} = \mathrm{sd}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) = \alpha \cdot \sigma_{R^{\mathbf{w}}}.$$

Wir erhalten für $\alpha > 0$

$$R^{\bar{\mathbf{w}}} = R^f + \frac{\sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}}}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}(R^{\mathbf{w}} - R^f).$$

Für den Fall $\alpha < 0$ erhalten wir in analoger Weise nur mit vertauschtem Vorzeichen (da $\sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}} = (-\alpha)\sigma_{R^{\mathbf{w}}}$)

$$R^{\bar{\mathbf{w}}} = R^f - \frac{\sigma_{R^{\mathbf{w}_0}}}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}(R^{\mathbf{w}} - R^f).$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\mathbb{E}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) = R^f \pm \left(\frac{\mathbb{E}(R^{\mathbf{w}}) - R^f}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}\right) \cdot \sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}}.$$

4.1.22 Bemerkung: Wenn wir Portfolio bestehend aus riskanten Wertpapieren **und** der risikolosen Anlage betrachten, dann erhalten wir also einen **affinen** Zusammenhang zwischen der erwarteten Portfoliorendite $\mathbb{E}(R^{\bar{\mathbf{w}}})$ und der Standardabweichung der Portfoliorendite $\sigma_{R^{\bar{\mathbf{w}}}}$, wobei die Steigung dem sogenannten Sharpe-Ratio des risikobehafteten Teils entspricht. Dieser Zusammenhang hat die folgende Interpretation: Wenn das Risiko erfasst durch die Varianz um eine Einheit ansteigt, dann steigt die erwartete Rendite um das Sharpe-Ratio an. Das Sharpe-Ratio erfasst also die **Risikovergütung** je Einheit Risiko. Hier sollte man beachten, dass eine Variation von α mit einer Variation von $\sigma_{R^{\mathbf{w}_0}}$ einhergeht und letztere wird durch den in Rede stehenden affinen Zusammenhang erfasst.

4.1.23 Definition: Der Quotient

$$\mathrm{SR}^{\mathbf{w}} = \frac{\mathbb{E}(R^{\mathbf{w}}) - R^f}{\sigma_{R^{\mathbf{w}}}}$$

heißt **Sharpe-Ratio/Sharpe-Quotient** des Portfolio mit Anteilsvektor **w**.

4.1.24 Bemerkung: Der Sharpe-Quotient erweist sich als sehr nützlich. Wir betrachten dazu zwei Portfolio mit Anteilsvektoren $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ bestehend aus riskanten Wertpapieren. Wir unterstellen zur Vereinfachung, dass die Standardabweichungnen der Renditen übereinstimmen: $\sigma_{R^{\mathbf{w}_1}} = \sigma_{R^{\mathbf{w}_2}}$. Wir unterstellen ferner, dass der Sharpe-Quotient des ersten Portfolio größer als der des zweiten ist: $SR^1 > SR^2$. Wenn diese beiden Portfolio jeweils mit der risikolosen Analge kombiniert werden, dann ergeben sich zwei Kegel:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_1) &= R^f \pm SR^1 \sigma \\ \mathbb{E}(R_2) &= R^f \pm SR^2 \sigma\end{aligned}$$

Die beiden Kegel sind in der Abbildung 4.1.5 dargestellt. Der blaue Kegel gehört zu dem kleineren Sharpe-Quotienten (wobei die Standardabweichungen o.E.d.A. übereinstimmen). Man erkennt unmittelbar, dass der Kegel strikt größer ist, wenn der Sharpe-Quotient größer ist. Alle Anleger würden dementsprechend lieber das Portfolio 1 mit der risikolosen Anlage mischen als das Portfolio 2. In der Tat sind aus Sicht der Anleger Portfolio mit Anteilsvektoren am besten, deren betragsmäßiger Sharpe-Quotient $|SR^w|$ maximal ist, da dann der Kegel am meisten aufgespannt ist und der Anleger Kombinationen weiter im Nord-Westen erreichen kann. Diesen Aspekt werden wir später aufgreifen. Die Abbildung 4.1.6 zeigt, dass ein Portfolio mit einem negativen Sharpe-Quotient „attraktiver“ sein kann als ein Wertpapier mit einem positiven aber betragsmäßig kleineren Sharpe-Quotienten. Hier würde ein Anleger mit **Leerverkäufen** des grünen Wertpapiers und einer passenden Anlage am Geldmarkt eine besserer erwartete-Rendite-Standardabweichung Kombination erreichen als mit dem blauen Wertpapier (In einigen Quellen wird über diesen Fall salopp hin weggegangen und formuliert, dass der Sharpe-Quotient maximal sein solle).

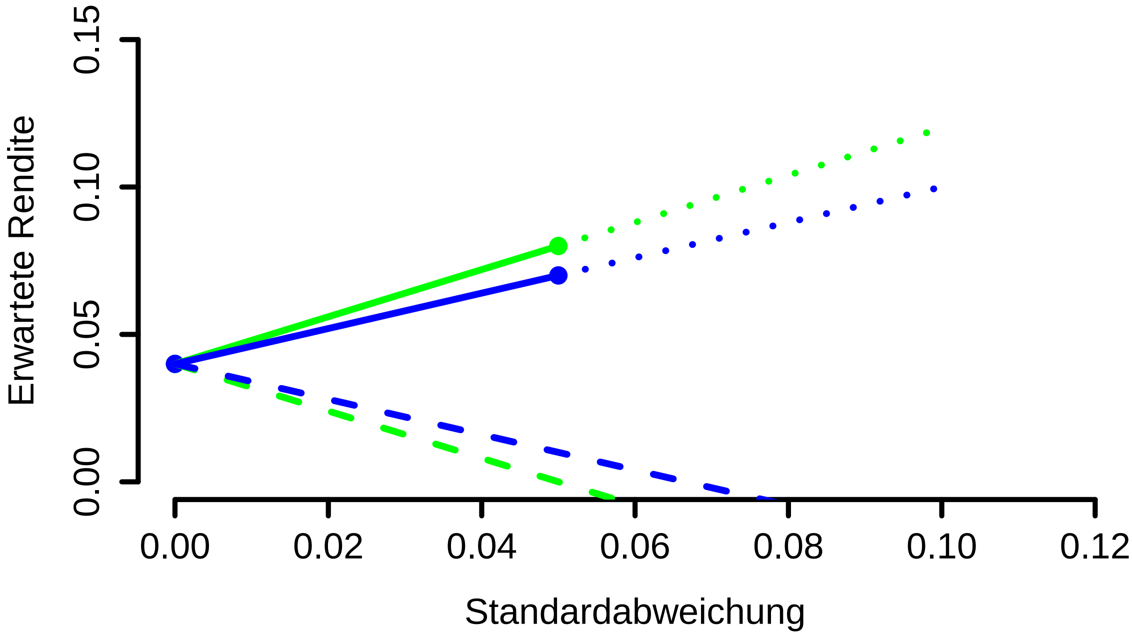


Abbildung 4.1.5: Unterschiedliche Sharpe-Quotienten. Der grüne Kegel gehört zu dem Portfolio mit dem größerem Sharpe-Quotienten. Die durchgezogenen Linien gehören zu $\alpha \in [0, 1]$, die gepunkteten zu $\alpha > 1$ (gehebelte Postion) und die gestichelten zu $\alpha < 0$ (Leerverkauf).

Quelle: Eigene Darstellung

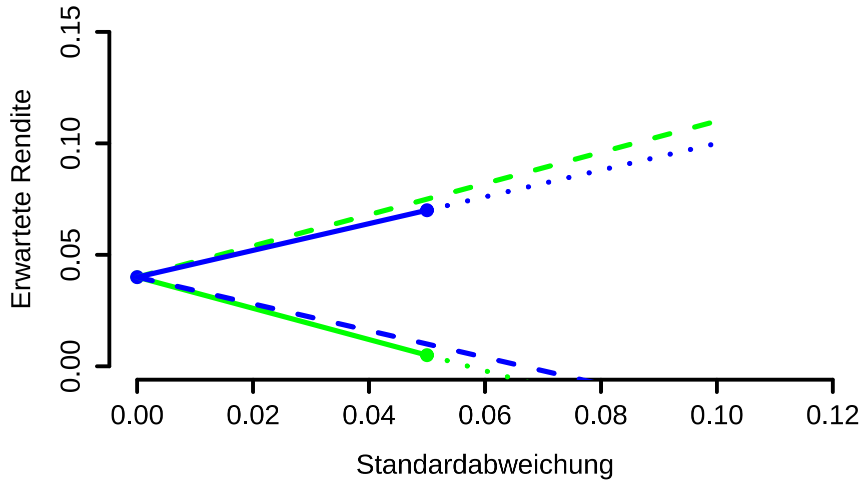


Abbildung 4.1.6: Negativer Sharpe-Quotient. Der grüne Kegel gehört zu dem Portfolio mit einem negativen Sharpe-Quotienten. Dieses Wertpapier ist interessanter, da es bei einem entsprechenden Leerverkauf eine besser Rendite-Varianz-Kombination erlaubt.

Quelle: Eigene Darstellung

4.1.25 Satz (Grenzportfolio): Gegeben seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$, wobei der $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{R})$ nicht zu $\mathbf{1}$ proportional und $\mathbf{\Sigma}$ nicht singulär ist. Gegeben sei ferner eine risikofreie Anlageform mit Rendite $R^f \in \mathbb{R}$, wobei $R^f \neq \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}^{\text{gvm}}$. Dann hat das Optimierungsproblem

$$\min_{\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^N} \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{u.d.N} \quad (\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})^T \tilde{\mathbf{w}} = \mu^* - R^f \tag{4.9}$$

die Lösung[2]

$$\tilde{\mathbf{w}}^* = \frac{\mu^* - R^f}{(\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})} \mathbf{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1}) \tag{4.10}$$

Die so beschriebene Portfolio definieren einen Kegel in der σ-μ-Ebene den wir **Grenzportfoliokegel** nennen.

Beweis: siehe Back [1]

4.1.26 Lemma: Die Varianz der Rendite $R^{\bar{\mathbf{w}}}$ eines Portfolios mit Anteilsvektor $\bar{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_N, 1 - \alpha)^T, \tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_N)^T, \alpha = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i$ ist

$$\mathbb{V}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) = \mathbb{V}((1 - \alpha) R^f + \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i R^i) = \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}}.$$

4.1.27 Bemerkung: Wir beachten zunächst $\alpha = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{w}}_i$

[2] Beachte, dass $\tilde{\mathbf{w}}^*$ nicht notwendigerweise ein Anteilsvektor ist, d.h. i.A. gilt $\sum_{j=1,...,N} \tilde{w}_i = 1$ nicht.

und

$$
\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})^T \tilde{\mathbf{w}} = \mu^* - R^f \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\mathbf{w}} - \alpha R^f = \mu^* - R^f \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\mathbf{w}} + (1-\alpha) R^f = \mu^*.
\end{aligned}
$$

Also ist μ^* die erwartete Rendite des Portfolios mit Anteilsvektor $\bar{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{w}}^T, 1-\alpha)$. Im Satz 4.1.25 erfasst die Nebenbedingung des Optimierungsproblems diesen Sachverhalt.

Gemäß des vorgehenden Lemma ist die Varianz der Rendite des Portfolios $\bar{\mathbf{w}}$ gerade die Zielfunktion aus dem Satz 4.1.25: $\mathbb{V}(R^{\bar{\mathbf{w}}}) = \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}}$ Nach Satz 4.1.25 erhält man ein Grenzportfolio gemäß

$$
\bar{\mathbf{w}}^* = (\tilde{\mathbf{w}}^*, 1-\alpha),\ \alpha = \mathbf{1}^T \tilde{\mathbf{w}}^*,
$$

wenn $\tilde{\mathbf{w}}^*$ wie im vorhergehenden Satz berechnet wird. Also ist $\bar{\mathbf{w}}^*$ ein Portfolio mit erwarteter Rendite μ^* und minimaler Varianz (bzw. Standardabweichung). Solche Portfolio heißen Grenzportfolio.

4.1.28 Satz (Tangentialportfoilio): Gegeben seien N Wertpapiere mit riskanten Renditen $\mathbf{R} = (R^1, ..., R^N)^T$, wobei der $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{R})$ nicht zu $\mathbf{1}$ proportional und $\boldsymbol{\Sigma}$ nicht singulär ist. Gegeben sei ferner ein risikoloses Wertpapiere mit Rendite R^f, die von der Rendite des global varianzminimalen Portfolio verschieden ist (d.h. $R^f \neq \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}^{\text{gvm}}$).

Dann ist

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{ta}} = \frac{1}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R^f \mathbf{1})$$

der Anteilsvektor eines Tangentialportfolios, d.h. das Portfolio mit folgenden Eigenschaften:

- $(\boldsymbol{w}^{\mathrm{ta}})^T \mathbf{1} = 1$.
- An der zugehörigen Stelle der σ-μ-Ebene berühren sich die Grenzportfoliohyperbel und der Grenzportfoliokegel.
- Ein Portfolio mit Anteilsvektor $\boldsymbol{w}^{\mathrm{ta}}$ ist sowohl für einen Finanzmarkt einschließlich der risikolosen Anlageform als auch für den Finanzmarkt ohne risikolose Anlageform ein Grenzportfolio (jedoch nicht notwendigerweise effizient).
- Der Betrag des Sharpe-Ratio ist maximal.

Beweis: Vgl. Back [1, S. 86-88]. $\square$

4.1.29 Bemerkung: Die Abbildung 4.1.7 fasst die Analyse bis hier hin grafisch zusammen. Ein μ-σ-Anleger ermittelt zunächst die Grenzportfolio der riskanten Wertpapiere; das ist die Hyperbel in der Abbildung 4.1.7. Dann wird das Tangentialportfolio (das ist der blaue Punkt) ermittelt. Dieses Tangentialportfolio wird dann mit der risikofreien Anlage kombiniert. Alle Kombinationen dieser Art bilden die Grenzportfolio (einschließlich der risikofreien Anlage); das ist der Kegel aus der durchgezogenen Linie und der gestichelten Linie. Die effizienten Portfolio liegen dann auf dem oberen Rand des Kegels (die durchgezogenen Linie).

4.1.30 Bemerkung: Der in der Abbildung 4.1.7 dargestellte Fall kann als der Normalfall angesehen werden. Allerdings ist es auch möglich, dass das Tangentialportfolio ineffizient ist. Das ist dann der Fall, wenn $R^f > \mathbb{E}(R^{\mathrm{gvm}})$ ist. Diese Situation ist in der Abbbildung 4.1.8 dargestellt. Auch in diesem Fall liegen die effizienten Portfolio auf dem oberen Rand des Kegels. Allerdings ergeben sich diese Portfolios durch Leerverkauf des Tangentialportfolio und der Anlage am Geldmarkt. Das bemerkenswerte ist, dass sich hier die besten Anlagechance aus der Kombination mit einem an-und-für-sich schlechten Wertpapier ergeben. Dieses schlechte Wertpapier wird leer verlauft und so werden aus einen pessimistischen Umfeld Anlagechancen.

4.1.31 Bemerkung: Für den Fall, dass eine risikolose Anlageform existiert kann man das Grenzportfolio mit Rendite μ^* gemäß Satz 4.1.25 bestimmen. Alternativ kann man auch so vorgehen. Man bestimmt zunächst das Tangentialportfolio und dessen Rendite R^{wta}. Dann löst man

$$(1-\alpha)R^f + \alpha R^{\mathrm{wta}} = \mu^*,$$
$$\alpha = \frac{\mu^* - R^f}{R^{\mathrm{wta}} - R^f}.$$

Das Grenzportfolio mit einer erwarteten Rendite von μ^* ist dann $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}, 1-\alpha), \mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}^{\mathrm{ta}}$.

4.2 CAPM

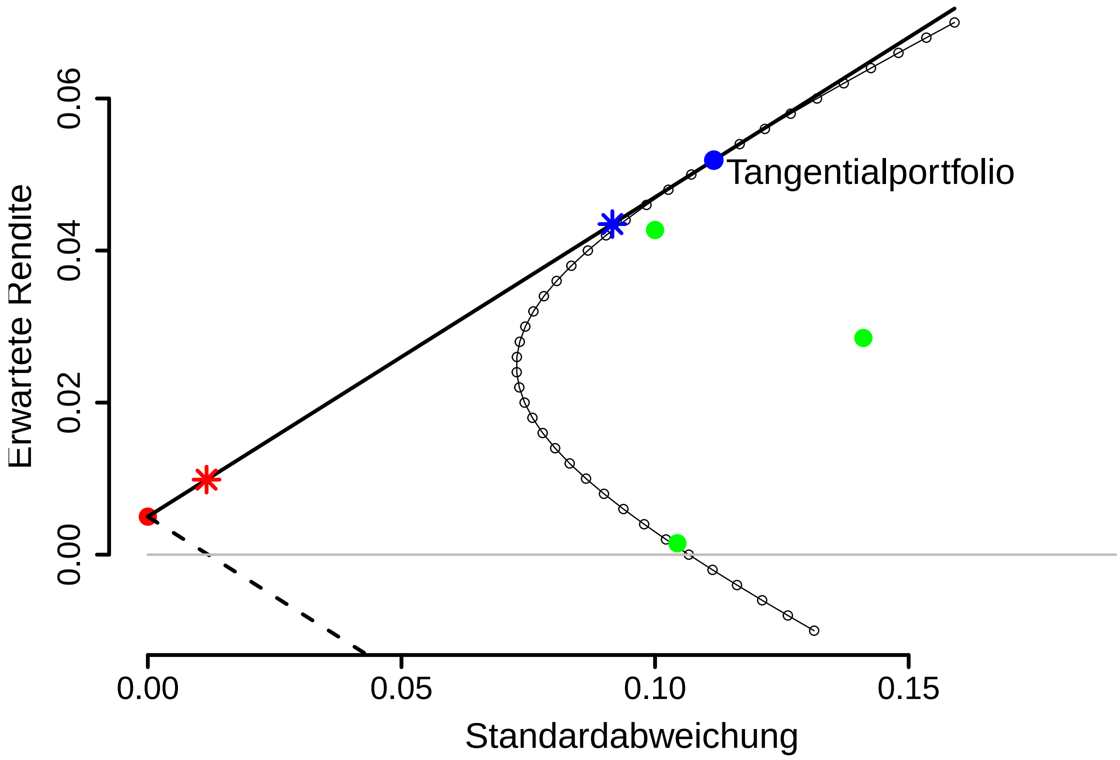


Abbildung 4.1.7: μ-σ-Diagramm. Die schwarze Kurve zeigt die μ-σ der Grenzportfolio der riskanten Wertpapiere. Der Kegelrand (aus durchgezogener und gestrichelter Linie) zeigt die μ-σ der Grenzportfolio aller Wertpapiere. Der blaue Punkt markiert das μ-σ des Tangentialportfolio. Die durchgezogene Linie zeigt die μ-σ der effizienten Portfolio und die gestichelte Linie die der ineffizienten Portfolio.

Quelle: Eigene Darstellung

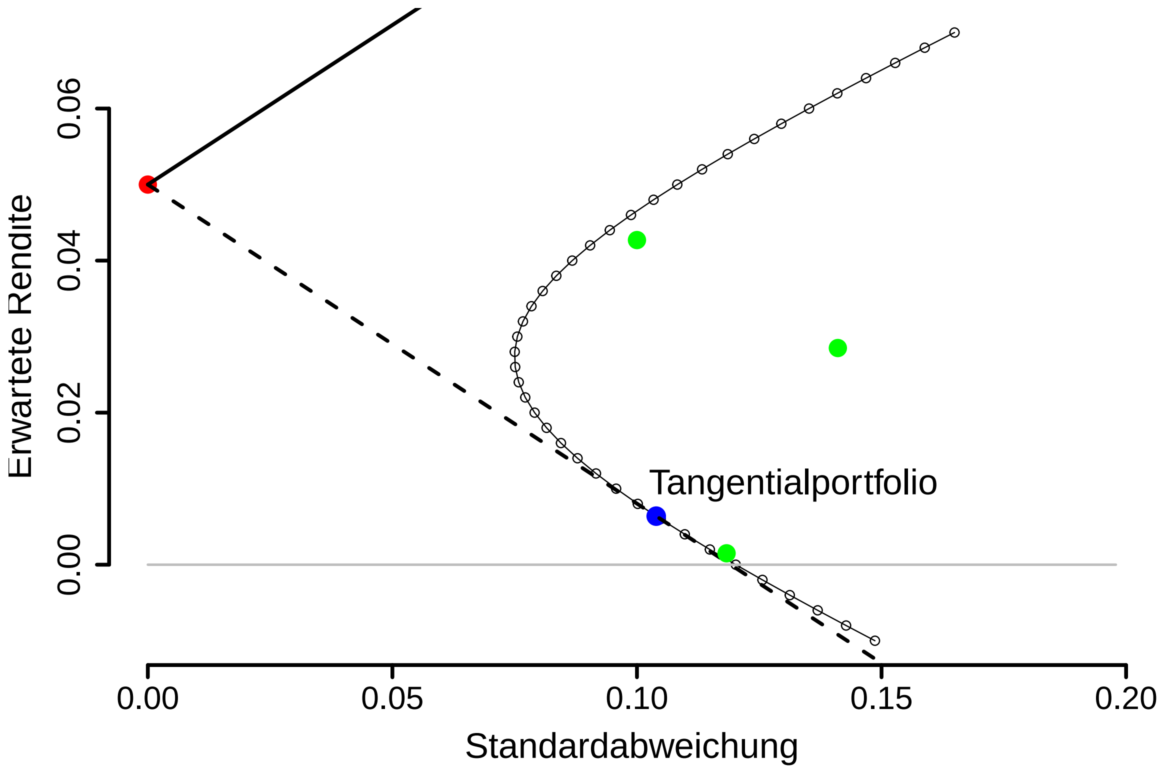


Abbildung 4.1.8: μ-σ-Diagramm. Die schwarze Kurve zeigt die μ-σ der Grenzportfolio der riskanten Wertpapiere. Der Kegelrand (aus durchgezogener und gestrichelter Linie) zeigt die μ-σ der Grenzportfolio aller Wertpapiere. Der blaue Punkt markiert das μ-σ des Tangentialportfolio. Die durchgezogene Linie zeigt die μ-σ der effizienten Portfolio und die gestichelte Linie die der ineffizienten Portfolio. Hier hat das Tangentialportfolio einen negativen Sharpe-Quotienten.

Quelle: Eigene Darstellung

5 Risikoanalyse

Verteilungsfunktionen werden in allen Bücher zur Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt; also auch in Henze [18]. Quantilsfunktionen werden dort auch behandelt und vergleichsweise detailliert in Föllmer und Schied [10] untersucht. Quantile und Quantilsfunktionen sind insbesondere für die **Finanzmathematik (Risikomanagement)** von SEHR großer Bedeutung. In der Tat ist das bekannteste Risikmaß – der Value at Risk – ein Quantil.

5.1 Verteilungsfunktion

5.1.1 Definition: Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ heißt **Verteilungsfunktion**, falls:

- F ist nicht fallend, d.h. $x \leq y$ impliziert $F(x) \leq F(y)$.
- F ist von rechts stetig, d.h. $\lim_{y \to x, y > x} F(y) = F(x)$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

5.1.2 Satz: Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Dann ist

$$F = \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x]) \end{cases}$$

eine **Verteilungsfunktion**. $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$ ist also die Wahrscheinlichkeit, beim Experiment $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein Ergebnis kleiner oder gleich x zu beobachten.

5.1.3 Satz: Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass $\mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

5.1.4 Satz: i.) Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Dann existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{y \to x, y < x} F(y) =: F(x-).$$

Für diesen Grenzwert schrieben wir $F(x-)$.

Beweis: Vgl. Rudin [40, Seite 95]

ii.) Es sei F eine Verteilungsfunktion, dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen höchstens abzählbar unendlich.

5.1.5 Bemerkung: Die Unstetigkeitsstellen einer Verteilungsfunktion sind nicht notwendigerweise *isoliert* (vgl. Rudin [40, Seite 97]).

5.1.6 Satz: Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, die durch $\mathbb{P}$ wie in (5.1.2) definierte Verteilungsfunktion mit $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}, x < y$:

i.) $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$

ii.) $F(x-) = \mathbb{P}((-\infty, x))$

iii.) $F(x) = 1 - \mathbb{P}((x, \infty))$

iv.) $F(x-) = 1 - \mathbb{P}([x, \infty))$

v.) $\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-)$ [Sprunghöhe bei x]

vi.) $\mathbb{P}((x, y]) = F(y) - F(x)$

vii.) $\mathbb{P}([x, y]) = F(y) - F(x-)$

viii.) $\mathbb{P}((x, y)) = F(y-) - F(x)$

ix.) $\mathbb{P}([x, y)) = F(y-) - F(x-)$

5.1.7 Satz: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dichte. Dann ist $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

eine Verteilungsfunktion.

Man spricht von der Verteilungsfunktion F mit der **Dichte** f.

5.1.8 Satz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ höchstens abzählbar, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein **diskretes** Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$

mit Zähldichte p. Dann ist $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$F(x) = \sum_{k \in (-\infty, x] \cap \Omega} p_k$$

eine Verteilungsfunktion. Das ist eine Treppenfunktion mit Stufen an den Stellen k mit Stufenhöhe p_k.

5.1.9 Bemerkung: Es gibt auch Verteilungsfunktionen, die weder eine Dichte haben noch diskret sind: Verteilungsfunktionen mit Sprungstellen, die aber keine (reinen) Treppenfunktionen sind.

5.2 Quantile, Quantilsfunktionen und Verallgemeinerte Inverse

5.2.1 Definition: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine Wahrscheinlichkeitsraum, X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $\lambda \in (0, 1)$. Eine reelle Zahl q heißt $\lambda-$**Quantil** der Zufallsvariable X, falls

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X \le q) \ge \lambda \quad \textbf{und} \\ &\mathbb{P}(X \ge q) \ge 1 - \lambda \ . \end{aligned}$$

In Worten: (i) Die Wahrscheinlichkeit, dass X die Grenze q nicht überschreitet ist mindestens λ **und** (ii) die Wahrscheinlichkeit, dass X die Grenze q nicht unterschreitet ist mindestens $1 - \lambda$.

▶ Das ist vielleicht eine/die Gelegenheit in z.B. Fahrmeir et al. [**?**, Seite 59 ff] die Abschnitte zu empirischen Quantilen nachzulesen.

5.2.2 Bemerkung: Es gilt (wir beginnen mit der zweiten Bedingung aus der Definition)

$$\begin{aligned} & 1-\lambda \leq \mathbb{P}(X \geq q) \\ \Leftrightarrow\ & 1-\mathbb{P}(X \geq q) \leq \lambda \\ \Leftrightarrow\ & F(q-) = \mathbb{P}(X < q) \leq \lambda \end{aligned}$$

Dementsprechend ist q ein $\lambda-$**Quantil** der Zufallsvariable X, falls

$$\begin{aligned} F(q) = \mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda \ \textbf{und} \\ F(q-) = \mathbb{P}(X < q) \leq \lambda. \end{aligned}$$

5.2.3 Satz: Es sei X eine Zufallsvariable und $X \sim F$. Es sei $\lambda \in (0,1)$. $q \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein λ-Quantil von X, wenn

$$F(q-) \leq \lambda \leq F(q+) = F(q)$$

ist.

5.2.4 Definition: Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann heißt $(0,1) \ni \lambda \mapsto q^+(\lambda)$ mit

$$\begin{aligned} q^+(\lambda) &= \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) > \lambda\} \\ &= \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) \leq \lambda\} \end{aligned}$$

die **obere Quantilsfunktion** von F und $(0,1) \ni \lambda \mapsto q^-(\lambda)$

$$\begin{aligned} q^-(\lambda) &= \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) < \lambda\} \\ &= \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\} \end{aligned}$$

die **untere Quantilsfunktion** von F.

Insbesondere im **Risikomanagement** nennt man die untere Quantilsfunktion auch **Verallgemeinerte Inverse** und schreibt

$$F^{\leftarrow}(\lambda) = q^-(\lambda)$$

5.2.5 Bemerkung: Wie sieht die Menge $A := \{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\}$ aus? Wenn $q_1 \in A$ ist und $q_2 > q_1$ gilt, dann ist $F(q_2) \geq F(q_1) \geq \lambda$. Also ist auch $q_2 \in A$. Also ist A ein Intervall der Form (z, ∞) oder der Form $[z, \infty)$. In der Tat hat das Interval wegen der von-rechts-Stetigkeit von F die Form $[z, \infty)$. Also gilt

$$\begin{aligned} q^-(\lambda) &= \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\} \\ &= \min\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

Wir können also anstatt des Infimums das Minimum bilden. Das Minimum wird angenommen: Es gibt also ein q^* mit der Eigenschaft $F(q^*) \geq \lambda$ und für alle $q < q^*$ gilt $F(q^*) < \lambda$.

Beweis: Angenommen $z = \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\}$, aber $F(z) \geq \lambda$ gilt nicht. Also $F(z) < \lambda$. Wir betrachten eine Folge (q_i) mit $q_i > z$ und $q_i \to z$ (eine Folge die von links gegen z konvergiert). Wegen der Stetigkeit von rechts für F gilt $F(q_i) \to F(z)$. Dann muss es – da $F(q) < \lambda$ – ein j mit $F(q_j) < \lambda$ und $q_j > z$ geben. Das ist jedoch ein Widerspruch, denn für alle q im Intervall (z, ∞) gilt $F(q) \geq \lambda$.

5.2.6 Satz: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

(1) Dann ist q^- nicht-fallend und von links stetig und

(2) q^+ nicht-fallend von rechts stetig.

(3) Es gilt $q^-(\lambda) \leq q^+(\lambda)$.

Beweis: Siehe Föllmer und Schied [10, S. 538f]

5.2.7 Satz: Es sei F eine Verteilungsfunktion. Für jedes $\lambda \in (0, 1)$ ist **die Menge der λ-Quantile das abgeschlossene Intervall** $[q^-(\lambda), q^+(\lambda)]$.

5.2.8 Bemerkung: Wenn F eine strikt monotone stetige

Verteilungsfunktion ist, dann ist für alle $\lambda \in (0,1)$:

$$q^+(\lambda) = q^-(\lambda) = F^{\leftarrow}(\lambda).$$

5.2.9 Lemma: Es sei F eine Verteilungsfunktion und

$$F^{\leftarrow}(\lambda) = q^-(\lambda) = \inf\{x|F(x) \geq \lambda\} = \min\{x|F(x) \geq \lambda\}$$

die untere Quantilsfunktion bzw. **eine Verallgemeinerte Inverse** von F. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$

$$F(x) \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq F^{\leftarrow}(\lambda).$$

Beweis (Siehe Henze [18, 151]): Für $\Rightarrow$ müssen wir nur bemerken, dass $\tilde{x} = F^{\leftarrow}(\lambda) = \min\{x|F(x) \geq \lambda\}$ gemäß Definition das kleinste x mit $F(x) \geq \lambda$ ist. Also $x \geq \tilde{x} = F^{\leftarrow}(\lambda)$.

Für $\Leftarrow$ nehmen wir an, dass $x \geq F^{\leftarrow}(\lambda) = \tilde{x}$ gibt, aber $F(x) < \lambda$ ist. Wir betrachten eine Folge (x_i) mit $x_i > x$ und $x_i \to x$. Wegen der Stetigkeit von rechts von F gilt $F(x_i) \to F(x)$. Aus der Konvergenz $F(x_i) \to F(x)$ und $F(x) < \lambda$ folgt, dass es ein $x_j > x \geq \tilde{x}$ mit $F(x_j) < \lambda$ gibt. Es gäbe also $x_j > x \geq F^{\leftarrow}(\lambda)$ mit $F(x_j) < \lambda$. Das ist aber ein Widerspruch, denn aus $x_j \geq \tilde{x}$ folgt $F(x_j) \geq F(\tilde{x}) = \lambda$.

5.2.10 Lemma: Es sei F eine Verteilungsfunktion und

$U \sim \text{Unif}((0{,}1))$. Dann hat die Zufallsvariable

$$X = F^{\leftarrow}(U)$$

die Verteilungsfunktion F; $X \sim F$.

Beweis: Siehe Henze [18, 153]. Es gilt gemäß des obigen Lemmas

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x) &\leq \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq x) && X = F^{\leftarrow}(U) \\
&= \mathbb{P}(U \leq F(x)) && \text{Lemma} \\
&= F(x). && \text{VF von Unif}
\end{aligned}$$

▶ Auf der Grundlage des vorhergehenden Lemmas, kann man Zufallszahlen gemäß einer Verteilung F erzeugen, wenn man Zufallszahlen gemäß einer Gleichverteilung erzeuge kann.

5.2.11 Lemma: Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Ferner sei F stetig. Dann gilt $F(X) \sim \text{Unif}([0,1])$. Also für $u \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(F(X) \leq u) = u$$

Beweis: Siehe Henze [18, 153].

5.3 Risikomessung

▶ Der Rest des Paragrafen ist als Vertiefung bzw. Anwendung für Risikomanager gedacht und noch arg fragmentarisch.

5.3.1 Terminologie und Einführung: Im folgenden stellen wir uns vor, dass ein Investor oder Manager das Risiko einer Vermögensposition analysiert. Den Wert dieser Vermögensposition bezeichnen wir mit V. Wir stellen uns ferner vor, dass der Wert in mindestens zwei Zeitpunkten betrachtet wird. Wir verwenden $t = 0$ für den Zeitpunkt zu dem der Vermögenswert fix und bekannt ist. Wir bezeichnen diesen Wert mit V_0. Den Wert V der Vermögensposition zu einem zukünftigen Zeitpunkt sehen wir als eine Zufallsvariable an, dessen Wert uns für den Zeitpunkt $t = 1$ interessiert. Wir verzichten manchmal bei der Variable V für den Zeitpunkt $t = 1$ auf den Index, d.h. wir schreiben einfach V anstatt V_1. Wir untersuchen meistens nicht V, sondern die **Veränderung** $G = V - V_0$ oder den **Verlust** $L = V_0 - V$. Trotzdem sprechen wir vom Value at Risk der Vermögensposition. G bezeichnet einen Gewinn (der natürlich auch negativ sein kann). Da wir Risikonanalyse betreiben, werden wir – der Literatur folgenden – oft die Variable Verlust $L = -G$ betrachten.

5.3.2 Defintion: Es sei V ein Vermögenswert und $G = V - V_0$ und $L = -G$. Dann ist der **Value-at-Risk (V@R)**

von V zur **Risikotoleranz** λ (eine kleine Zahl, z.B. $\lambda = 0.01$) die reelle Zahl

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(G) &= -q^+_{F_G}(\lambda) \\ &= q^-_{F_{-G}}(1-\lambda) \\ &= q^-_{F_L}(1-\lambda). \end{aligned}$$

Wenn wir Verluste betrachtet (α nahe 1, z.B. $\alpha = 0.99$)

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\alpha(L) &= q^-_{F_L}(\alpha) \\ &= F_L^{\leftarrow}(\alpha) \\ &= \inf\{x|F_L(x) \geq \alpha\} \\ &= \min\{x|F_L(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

dabei heißt α das **Sicherheitsniveau (Konfidenzniveau)**.

Die Abbildung

$$F^{\leftarrow}(\lambda) = \inf\{x|F(x) \geq \lambda\} = \min\{x|F(x) \geq \lambda\}$$

die **Verallgemeinerte Inverse** von F

5.3.3 Satz: Es gilt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(G) = \inf\{m \,|\, \mathbb{P}(G+m<0) \leq \lambda\}.$$

bzw.

$$\mathrm{V@R}_\alpha(L) = \inf\{m|\mathbb{P}(L-m>0) \leq 1-\alpha\}$$

5.3.4 Bemerkung: (1) Wir reden vom Value at Risk von V, obwohl die Defintion auf G bzw. L Bezug nimmt. Wir werden auch vom Value at Risk von G oder von L sprechen. Gemeint ist das negative des oberen λ-Quantil der Zufallsvariable G bzw. das untere $\alpha = (1 - \lambda)$-Quantil des Verlustes L.

(2) Der Value at Risk wird in den Einheiten gemessen, in denen die Zufallsvariable G gemessen wird, d.h. in der Regel in **Geldeinheiten**.

(3) Typischerweise wird das für die Risikonanalyse relevante λ-Quantil $q^+_{F_G}(\lambda)$ von G negativ sein.

(4) Der Value at Risk ist wegen der Multiplikation mit -1 so definiert, dass er die Grundlage für eine Kapitalanforderung ist; das wird weiter unter noch verdeutlicht.

(5) Wenn man anstatt des Zuwachses G die Verlustvariable L betrachtet, dann sind für den Übergang **drei Anpassung** nötig: (i) Anstatt der oberen Quantilsfunktion betrachtet man die untere Quantilsfunktion. (ii) Anstatt der Risikotoleranz λ berachtet man das **Sicherheitsniveau** $\alpha = 1 - \lambda$. (iii) Die Multiplikation mit -1 entfällt.

(6) Es ist $G + m = -L + m$. Also ist $G + m < 0$ genau dann, wenn $m < L$. Wenn wir m als **Eigenkapital** auffassen, dann erkennen wir, dass $\mathrm{V@R}_\lambda(G)$ der kleinste Eigenkapitalwert ist, der ausreicht eine Insolvenz – hier definiert als Verluste größer als das Eigenkapital – mit Wahr-

scheinlichkeit λ zu vermeiden. Man kann also den V@R im Kontext der **Eigenkapitalregulierung** unmittelbar anwenden. Der V@R ist auch aus diesem Grund populär.

5.3.5 Beispiel: Es sei $G \sim N(\mu, \sigma^2)$ Normalverteilt und die Risikotoleranz $\lambda \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(G) &= -\mathbb{E}(G) - \Phi^{-1}(\lambda) \cdot \sigma && (5.1) \\ &= -\mu - \Phi^{-1}(\lambda) \cdot \sigma && (5.2) \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0.01$ erhalten wir $\Phi^{-1}(0.01) = -2.33$, so dass $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mu + 2.33 \cdot \sigma$. Für $\lambda = 0.0001$ ist $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mu + 3.09 \cdot \sigma$. Praktisch: Wenn wir den Erwartungswert und die Varianz von X geschätzt haben und die Annahme der Normalverteilung angemessen ist, dann können wir für den Fall einer Normalverteilung den V@R leicht ermitteln.

5.3.6 Satz: Der Vermögenswert V sei eine Zufallsvariable und $V_0 \neq 0$ eine reelle Zahl. Ferner sei $R = \frac{V - V_0}{V_0}$ eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz σ^2 und Erwartungswert μ und die Verteilungsfunktion $F_{R^{sz}}$ der Zufallsvariable $R^{sz} = \frac{R-\mu}{\sigma}$ sei strikt monoton steigend und stetig. Dann gilt

$$\mathrm{V@R}_\lambda(V) = -(\mu + \sigma \cdot F_{R^{sz}}^{-1}(\lambda))V_0.$$

Beweis: Da die Verteilungsfunktion annahmegemäß strikt monoton steigend und stetig ist gilt für den V@R die Gleichung

$$\lambda \;=\; \mathbb{P}\left(V - V_0 \leq -\mathrm{V@R}_\lambda(V)\right)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\lambda \;&=\; \mathbb{P}\left(\frac{R-\mu}{\sigma} \leq -\frac{\mathrm{V@R}_{t,\lambda}(V)}{V_0\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) \\
&=\; \mathbb{P}\left(R^{sz} \leq -\frac{\mathrm{V@R}_{t,\lambda}(V)}{V_0\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
F_{R^{sz}}^{-1}(\lambda) &= -\frac{\mathrm{V@R}_{t,\lambda}(V)}{V_0\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \\
\Rightarrow\; \mathrm{V@R}_\lambda(V) &= -(\mu + \sigma \cdot F_{R^{sz}}^{-1}(\lambda))V_0
\end{aligned}$$

5.3.7 Bemerkung: Der Betrachtungszeitpunkt sei $\tau - 1$. Wir wollen eine Risikoeinschätzung für τ ermitteln. In der Praxis geht man regelmäßig so vor.

i.) Zunächst erstellt man für die Rendite ein Zeitreihenmodell der Form

$$R_t = \mu_t + \sigma_t z_t, t \in \mathbb{Z},$$

wobei $\mu_t = \mathbb{E}_{t-1}(R_t), \mathbb{V}_{t-1}(R_t) = \sigma_t^2$. Ferner wird angenommen, dass $(z_t) \sim \mathrm{iid}(0,1)$ mit Verteilungsfunktion $F_{R^{sz}}$ ist ((z_t) ist also striktes **weißes Rauschen**).

ii.) Wir verwenden den Satz (5.3.6) und schätzen den aktuellen Value at Risk mit

$$\mathrm{V@R}_{\lambda,\tau}(V) \;=\; -(\mu_\tau + \sigma_\tau \cdot F_{R^{sz}}^{-1}(\lambda))V_{\tau-1}.$$

Bei dieser Methoden muss man also zwei statistische Probleme lösen:

- Ein Zeitreihenmodell $R_t = \mu_t + \sigma_t z_t$ schätzen; mindestens muss man μ_t und σ_t schätzen.
- Die Verteilungsfunktion $F_{R^{sz}}$ schätzen.

5.3.8 Bemerkung: Value at Risk ist nicht unumstritten. Zwei Eigenschaften sind problematisch:

- V@R ist im Allgemeinen nicht sub-additiv.
- V@R beachtet nicht, wie die Verteilung von X links von V@R gestaltet ist.

5.3.9 Behauptung: Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F = F^X$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int X dF = \int_0^1 F^{\leftarrow}(u) du.$$

Beweis: (den Beweis können wir eigentlich noch nicht würdigen, da wir Integration bezüglich dF und den Umgang mit solchen Lebesgue-Stieltjes-Integralen noch nicht kennen).

Es sei U eine Zufallsvariable mit $U \sim$ Unif((0,1)). Dann hat (auch) die Zufallsvariable $Y = F^{\leftarrow}(U)$ die Verteilungsfunktion F. Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int Y dF \\ &= \int F^{\leftarrow}(U) dF^U \\ &= \int F^{\leftarrow}(u) du.\end{aligned}$$

5.3.10 Beispiel: Wir betrachten $X \sim$ Bernoulli mit $\text{Bild}(X) = \{-b, a\}$ für $a, b > 0$ und $\mathbb{P}(X = a) = p$. Dann ist für $\lambda \in (0, 1)$

$$F^{\leftarrow}(\lambda) = \begin{cases} -b \text{ falls } \lambda \leq 1-p \\ a \text{ falls } \lambda > 1-p \end{cases}$$

Es gilt einerseits

$$\mathbb{E}(X) = p\,a - (1-p)b.$$

Andererseits

$$\begin{aligned}\int F^{\leftarrow}(u) du &= \int_0^{1-p} (-b) du + \int_{1-p}^1 a du \\ &= (-b)(1-p) + a(1-(1-p)) \\ &= (-b)(1-p) + a\,p \\ &= p\,a - (1-p)b.\end{aligned}$$

5.3.11 Bemerkung: Es sei X eine Zufallsvariable mit strikt monoton wachsender C^1-Verteilungsfunktion F und $f = F'$. Dann ist F invertierbar. Wir betrachten die Substitution $u = F(x), x = F^{-1}(u)$ und verwenden die Substitutionsregel der Integration $du = F'(x)dx = f(x)dx$

$$\mathbb{E}(X) = \int xf(x)dx = \int F^{-1}(u)du.$$

5.3.12 Definition: Es sei L eine Zufallsvariable mit $L \sim F$ und $\mathbb{E}(|L|) < \infty$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}_\alpha(L) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{\leftarrow}(u)du \\ \mathrm{TVaR}_\alpha(L) &= \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) \end{aligned}$$

ES steht für **Expected Shortfall** und TVaR für **Tail-Value-at-Risk**.

▶ Die folgende Bemerkung stellt Resultate über den Zusammenhang zwischen ES und TVaR zusammen. TVaR ist anschaulicher, jedoch nicht sub-additiv. ES ist sub-additiv.

5.3.13 Bemerkung (McNeil et al. [?, Seite 283]): Es sei L eine Verteilungsfunktion und $L \sim F$. Dann gilt

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] + F^{\leftarrow}(\alpha)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}_\alpha(L) &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] + F^{\leftarrow}(\alpha)(1-\alpha-\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha)))\right] \\ &= \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) \cdot \gamma + F^{\leftarrow}(\alpha) \cdot (1-\gamma) \\ &= \mathrm{TVaR}_\alpha(L) \cdot \gamma + \mathrm{VaR}_\alpha(L) \cdot (1-\gamma). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha} \\ &= \frac{1-\mathbb{P}(L \leq F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha} = \frac{1-F(F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - F^{\leftarrow}(\alpha) \cdot \mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha)).$$

Wenn F^L an der Stelle $F^{\leftarrow}(\alpha)$ stetig ist, dann gilt

$$\mathrm{ES} = \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) = \mathrm{TVaR}.$$

Beweis: Wir beachten

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 [F^{\leftarrow}(u) - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\, du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 [F^{\leftarrow}(u) - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\, du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{\leftarrow}(u)du - \frac{F^{\leftarrow}(\alpha)}{1-\alpha}\int_\alpha^1 1\, du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{\leftarrow}(u)du - F^{\leftarrow}(\alpha).\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{\leftarrow}(u)du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] + F^{\leftarrow}(\alpha)\end{aligned}$$

Weiterhin beachten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot (L - F^{\leftarrow}(\alpha))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot F^{\leftarrow}(\alpha)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - F^{\leftarrow}(\alpha) \cdot \mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))
\end{aligned}$$

Also weiterhin

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+\right] + F^{\leftarrow}(\alpha) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - F^{\leftarrow}(\alpha) \cdot \mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha} + F^{\leftarrow}(\alpha) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - F^{\leftarrow}(\alpha) \cdot \mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha} + F^{\leftarrow}(\alpha) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L>F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L\right] - F^{\leftarrow}(\alpha)\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha)) + (1-\alpha)F^{\leftarrow}(\alpha)}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

5.3.14 Bemerkung: Man kann den ES als Erwartungswert einer Zufallsvariable eines zwei-stufigen Experiments auffassen: Zunächst mit Wahrscheinlichkeit $1 - \gamma$ der fixe Wert $F^{\leftarrow}(\alpha)$ oder mit Wahrscheinlichkeit γ die Zufallsvariable L mit Verteilung unter der Bedingung $L > F^{\leftarrow}(\alpha)$. Dann erhalten wir den Erwartungswert

$$\mathrm{ES} = \gamma \cdot \mathbb{E}(L | L > F^{\leftarrow}(\alpha)) + (1-\gamma) \cdot F^{\leftarrow}(\alpha)$$

mit

$$\gamma = \frac{\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

5.3.15 Definition und Behauptung (Rockafellar und Uryasev [?, Seite 1449]): Es sei F eine Verteilungsfunktion. Wir definieren

$$F^{\alpha\text{-Tail}}(x) = \begin{cases} 0 & x < F^{\leftarrow}(\alpha) \\ \frac{F(x)-\alpha}{1-\alpha} & x \geq F^{\leftarrow}(\alpha) \end{cases}$$

$F^{\alpha\text{-Tail}}(x)$ ist eine Verteilungsfunktion.

5.3.16 Satz (Rockafellar und Uryasev [?, Seite 1448]): Es sei L eine Verteilungsfunktion und $L \sim F$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{TVaR} &= \int L\, dF^{\alpha\text{-Tail}} \\ &= \mathbb{E}(L | L \text{ im } \alpha\text{-Tail}). \end{aligned}$$

5.3.17 Beispiel: Es sei $\mathrm{Bild}(L) = \{..., 2, 3, 4\}$ mit $\mathbb{P}(L = 2) = \mathbb{P}(L = 3) = \mathbb{P}(L = 4) = 0.02$. Es sei $\alpha = 0.95$. Dann ist $F^{\leftarrow}(\alpha) = 2$. Es ist $\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha)) = 0.96$ und $\mathbb{P}(L = F^{\leftarrow}(\alpha)) = 0.02$.

Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \int L\, dF^{\alpha\text{-Tail}} &= 2 \cdot \frac{0.96 - 0.95}{1 - 0.95} + 3 \cdot \frac{0.98 - 0.96}{1 - 0.95} + 4 \cdot \frac{1 - 0.98}{1 - 0.95} \\ &= 2 \cdot \frac{0.01}{0.05} + 3 \cdot \frac{0.02}{0.05} + 4 \cdot \frac{0.02}{0.05} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 + 6 + 8}{5} \\ &= \frac{16}{5} = 3.2 \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$F^{\leftarrow}(u) = \begin{cases} 4 & \text{für} \;\; 0.98 \leq u \\ 3 & \text{für} \;\; 0.98 \leq u < 0.96 \\ 2 & \text{für} \;\; 0.94 \leq u < 0.96 \\ ... & ... \quad ... \end{cases}$$

Also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\alpha}\int_{0.95}^{1} F^{\leftarrow}(u)du \\
&= \frac{1}{0.05}\left(2[x]_{0.95}^{0.96} + 3[x]_{0.96}^{0.98} + 4[x]_{0.98}^{1}\right) \\
&= \frac{1}{0.05}\left(2 \cdot (0.96 - 0.95) + 3 \cdot (0.98 - 0.96) + 4 \cdot (1 - 0.98)\right) \\
&= \frac{1}{0.05}\left(2 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.02\right) = \frac{0.16}{0.05} \\
&= 3.2
\end{aligned}$$

Es gibt noch eine dritte Möglichkeit TVaR berechnen. Es ist

$$\gamma = \frac{\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1-\alpha} = \frac{0.04}{0.05} = \frac{4}{5}$$

und weiterhin

$$
\begin{aligned}
&(1-\gamma)\cdot F^{\leftarrow}(\alpha)+\gamma\cdot\mathbb{E}(L|L>F^{\leftarrow}(\alpha))\\
&=\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(3\cdot\frac{\mathbb{P}(L=3)}{\mathbb{P}(L>2)}+4\cdot\frac{\mathbb{P}(L=4)}{\mathbb{P}(L>2)}\right)\\
&=\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(3\cdot\frac{0.02}{0.04}+4\cdot\frac{0.02}{0.04}\right)\\
&=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(3\cdot\frac{2}{4}+4\cdot\frac{2}{4}\right)\\
&=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{6}{4}+\frac{8}{4}\right)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{14}{4}\right)=\frac{16}{5}\\
&=3.2
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] **Back, Kerry**; 2010; Asset Pricing and Portfolio Choice Theory; 2. Auflage; Oxford University Press; Oxford

[2] **Björk, Tomas**, 2009, Arbitrage Theory in Continuous Time, 3. Auflage, Oxford University Press, Oxford

[3] **Björk, Tomas**, 20....., Arbitrage Theory in Continuous Time, 4. Auflage, Oxford University Press, Oxford

[4] **Campolieti, Guiseppe und Roman Makarov**, 2014, Financial Mathematics, CRC Press – Taylor & Francis Group

[5] John **Cochrane**, 2005, Asset Pricing: Revised Edition; Princeton University Press

[6] **Cox, John C. und Stephen Ross, Mark Rubinstein**, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, Vol. 7, S. 229?263.

[7] **de la Grandville, Olivier**, 2001, Bond Pricing and Portfolio Analytics, MIT Press, Campbridge (Mass.)

[8] **Diebold, Francis und Glenn Rudebusch**, 2013, Yield Curve Modeling and Forecasting, Princeton University Press

[9] Darrell **Duffie**, 2001, Dynamic Asset Pricing, Princeton University Press.

[10] Hans **Föllmer** und Alexander **Schied**, 2016, Stochastic Finance – An introduction in discrete time, 4. Auflage, Gruyter

[11] Stephan Ramon **Garcia** und Roger **Horn**, 2017, Linear Algebra, Campbridge University Press

[12] Michael **Günther** und Ansgar **Jüngel**, 2010, Finanzmathematik mit Matlab, 2. Auflage, Springer-Vieweg

[13] Bruce **Hansen**, 2022, Econometrics, Princeton University Press

[14] John **Hull**, Options, Futures and other Derivatives; 11. Auflage; Pearson;

[15] John **Hull**, Optionen, Futures and andere Derivate; 11. Auflage; Pearson;

[16] **Harrison, J.M. und Stanley Pliska**, 1981, Martingales and Stochastic Intergrals in the Theory of Conti-

nuous Trading, Stochastic Processes an Applications, Vol. 11, S. 215-260.

[17] **Harrison, J.M. und David Kreps**, 1979, Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, Vol. 20, S. 381-408.

[18] **Hente, Norbert**, 2019, Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie, Springer Spektrum

[19] Kenneth **Hoffmann** und Ray **Kunze**, ..., Linear Algebra, ...

[20] **Kleiber, Christian und Achim Zeileis**, 2008, Applied Econometrics with R, Springer Verlag, Berlin

[21] Achim **Klenke**, 2013, Wahrscheinlichkeitstheorie, 3. Auflage, Springer Spektrum, Berlin

[22] **Krengel, Ulrich**, 2005, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 8. Auflage, Springer

[23] David **Kreps**, 2013, Microeconomic Foundations I, Princeton University Press

[24] Manfred **Jäger-Ambrozewicz**, 2025, Wahrscheinlichkeitstheorie, `https://www.mathstat.de/lehre.html`

[25] Robert **Jarrow**, 2002, Modelling Fixed-Income Secu-

rities and Interest Rate Options, Stanford University Press, Stanford

[26] **Jarrow, Robert, Stuart McLean Turnbull**, 2000, Derivative Securities, South-Western College Pub, ...

[27] Robert **Jarrow**, 2002, Derivative Securities, Financial Markets and Risk Management, W. W. Norton, New York

[28] Dieter **Jungnickel**, 2015, Optimierungsmethoden, 3. Auflage, Springer

[29] Uwe **Küchler**, 2016, Maßtheorie für Statistiker, 8. Auflage, Springer

[30] Damien **Lamberton** und Bernard **Lapeyre**, 2008, Introduction to Stochastic Calculus, 2. Edition, Chapman & Hall / CRC

[31] **Markowitz, Harry**, 1952, Portfolio selection, The Journal of Finance, Vol. 7 (1), S. 77-91.

[32] **Markowitz, Harry**, 1959, Portfolio selection, John Wiley, New York.

[33] **Meyer, Carl D.**, 2000, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[34] **McNeil, Alexander, Rüdiger Frey, Paul Em-**

brechts, 2015, Quantitative Risk Management, 2. Auflage, Princeton University Press, Princeton

[35] Claus **Munk**, 2013, Financial Asset Pricing Theory, Oxford University Press

[36] Marek **Musiela**, Marek **Rutkowski**, 2005, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer

[37] Stanley **Pliska**, 1997, Introduction to Mathematical Finance, Blackwell Publishing, Oxford

[38] Richard **Roll**, 1977, A critique of the asset pricing theoty's tests, Journal of Financial Economics, Vol. 4, S.129-176.

[39] Jan **Röman**, 2017, Analytical Finance Vol. 1, Palgrave Macmillan – Springer Nature

[40] Walter **Rudin**, 1976, Principles of Mathematical Analysis, 3. Auflage

[41] Rüdiger **Seydel**, 2009, Tools for Computational Finance, Springer, Heidelberg

[42] Rüdiger **Seydel**, 2017, Einführung in die numerische Berechnung von Finanzderivaten, 2. Auflage, Springer, Heidelberg

[43] Rüdiger **Seydel**, 2012, Lattice Approach and Implied Trees, in: Jin-Chuan Duan, Wolfgang Härdle, James

Gentle, Handbook of Computational Finance, S. 551ff, Springer Verlag, Berlin

[44] Steven **Shreve**, 2004, Stochastic Calculus for Finance 1, Springer, Heidelberg

[45] Steven **Shreve**, 2004, Stochastic Calculus for Finance 2, Springer, Heidelberg

[46] Costis **Skiadas**, 2009, Asset Pricing Theory, Princeton Univerity Press

[47] Michael **Steele**, 2010, Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer, Berlin.

[48] **Tappe, Stefan**, 2013, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Spektrum

[49] **Tolver, Anders**, 2016, An introduction to Markov chains, `http://www.math.ku.dk/noter/filer/stoknoter.pdf`

[50] **Veronesi, Pietro**, 2010, Fixed Income Securities, Wiley

[51] **Williams, Ruth**, 2006, Introduction to the Mathematics of Finance, American Mathematical Society

[52] **Zivot, Eric**, 2013, Portfolio Theory with Matrix Algebra, mineo