Finanzmathematik

Manfred Jäger-Ambrożewicz
www.mathfred.de
www.mathstat.de
16. August 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Ergebnisse im Basismodell

Agenda: Entwickelt wird ein Rahmen für die **relative** Wertpapierbewertung. Wir betrachten arbitragefreie (Modell-) Finanzmärkte und wickeln insbesondere das Risikoneutralbewertungsprinzip und die beiden Hauptsätze der Wertpapierbewertung.

Was soll man sich vorstellen? Wir stellen uns eine Finanzmathematikerin vor, die auf rationaler Basis eine ihr vorgelegtes Finanzprodukt bewerten will. Die Preise anderer Finanzprodukt kann die Finanzmathematikerin beobachten. Mit Blick auf die anderen Finanzpreise, welcher Preis ist rational für das vorgelegt Finanzprodukt.

Ein Finanzmathematiker ist Spezialist für ein Wertpapier. Er fragt sich, ob der Preises seines Wertpiers mit den Preisen anderer Wertpapiere konsistent ist oder ob eine Fehlbewertung vorliegt ....

1.1 Definitionen

1.1.1 Definition: Das **Ein-Perioden-Finanzmarktmodell (EPFMM)** ist durch die folgenden Angaben charakterisiert:

- Es gibt zwei **Zeitpunkte** $\mathbb{T} = \{0, 1\}$. In $t = 0$ kauft der Anleger Wertpapiere bzw. legt Geld am Geldmarkt an (der Anleger hat Ausgaben). In $t = 1$ ergeben sich die Auszahlungen *aus* den Wertpapieren an den Anleger.

- Es sei $K \in \mathbb{N}$. Es gibt K **Zustände** $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit $p_k := \mathbb{P}(\omega_k) := \mathbb{P}(\{\omega_k\}) > 0$ für $k = 1, ..., K$. Ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum ist bekanntlich durch die Angabe der Zähldichte $p_k \in (0, 1), k = 1, ..., K$ definiert:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\,:\,\omega_k \in A} p_k, \quad A \subset \Omega.$$

- Anleger haben Zugang zum **Geldmarkt**. Wenn ein Anleger in $t = 0$ eine Geldeinheit (GE) auf das Geldmarktkonto einzahlt, dann erhält er in $t = 1$ die Auszahlung $R^f > 0$. Mit $r = r^f = R^f - 1 > -1$ bezeichnen wir den **Geldmarktzinssatz**.

  Wir setzen nicht voraus, dass Zinsen nicht-negativ sind. Wir benötigen lediglich $r > -1$, denn wir werden regelmäßig beim diskontieren durch $1 + r$ dividieren.

Ist der Index 1 bei R_1^F überflüssig oder sogar irreführend?! In (1.1.6) gibt es den Index 0!

- Anleger können in $N \in \mathbb{N}$ Wertpapiere investieren; diese Wertpapiere nennen wir **Basiswertpapiere**.[1] Die Preise der Wertpapiere in $t = 0$ fassen wir in einem Vektor $\mathbf{S}_0 = (S_0^1, S_0^2, ..., S_0^N)^T \in \mathbb{R}^N$ zusammen. Die Wertpapierpreise in $t = 1$ sind Zufallsvariablen mit Realisierungen $S_1^i(\omega_k) \in \mathbb{R}, k = 1, ..., K, i = 1, ..., N$.

- Das folgende Schema zeigt die **Zeitschiene des EPFMMs**

$t = 0$: WP werden gekauft & Einzahlung am GM getätigt	$t = 1$: $\omega \in \Omega$ wird gezogen Auszahlungen finden statt

Vorgegeben werden also die folgenden Werte: r, S_0^i, $S_1^i(\omega_k)$ sowie die Wahrscheinlichkeiten p_k; diese Werte sind **exogen**.

1.1.2 Beispiel: Ein sehr kleines EPFMM wird durch die folgende Spezifikation definiert. Es sei $r = \frac{1}{9} = 0.11$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Wenn der Anleger 5 GE auf das Geldmarktkonto einzahlt, dann ergibt sich in $t = 1$ eine sichere Zahlung von $\frac{50}{9} = 5\left(1 + \frac{1}{9}\right)$; der Bruttozins ist demnach $R^f = \frac{10}{9}$. Wenn der Anleger für 5 GE das Wertpapier kauft, dann ergibt sich eine unsichere Auszahlung. Mit Wahrscheinlichkeit p_1 beträgt die Auszahlung $\frac{60}{9}$ und mit Wahrscheinlichkeit p_2 ist die Auszahlung $\frac{40}{9}$. Die erwartete Auszahlung ist $\mathbb{E}(S_1) = \frac{3}{4}\frac{60}{9} + \frac{1}{4}\frac{40}{9} = \frac{55}{9}$. In beiden Anlagevarianten setzt der Investor 5 GE. Bei der Anlage

Auch als Dezimalzahl mit Komma ....

*Aus*zahlung oder besser Zahlung an ....

[1] Zusammen mit dem Geldmarkt bilden die Wertpapier die Basisanlagemöglichkeiten des Modells.

am Geldmarktkonto ergibt sich eine sichere Zahlung von $\frac{50}{9}$. Wenn er das Wertpapier kauft, dann ist Auszahlung eine *Lotterie* mit Erwartungswert $\frac{55}{9}$.

Bei der Anlage am Geldmarkt ist die Rendite $\frac{1}{9}$. Bei der Anlage in das WP1 ist die Rendite $\frac{\frac{60}{9}-\frac{45}{9}}{\frac{45}{9}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ oder $\frac{\frac{40}{9}-\frac{45}{9}}{\frac{45}{9}} = \frac{-5}{45} = -\frac{1}{9}$. Die erwartete Rendite für den Geldmarkt ist (natürlich) $\frac{1}{9}$. Für das WP1 ist die erwartete Rendite $\frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{-1}{9} = \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36}$ und es ist $\frac{8}{36} > \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Die Anlage in das Wertpapier ist zwar riskant hat aber dafür eine höhere erwartete Rendite. Der Anleger wird sozusagen für die Übernahme des Risikos kompensiert. Man nennt die Differenz $\frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{4}{36}$ **Risikoprämie**.

1.1.3 Bemerkung: i.) Wir verwenden für $S_t^i(\omega_k)$ die folgenden **Konventionen**. Der Subindex t von $S_t^i(\omega_k)$ gibt den Zeitpunkt an. Der Superindex i von $S_t^i(\omega_k)$ gibt die Wertpapiernummer an. Das Argument ω_k von $S_t^i(\omega_k)$ gibt den Zustand an.

ii.) Eine Zufallsvariable $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlicher Menge $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ werden wir mit dem Vektor $(\mathbf{X}(\omega_1), ..., \mathbf{X}(\omega_K))^T$ *identifizieren*. Wir werden also wahlweise von der **Zufallsvariable** $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$, vom **Vektor** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ oder vom **Zahlungsprofil** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ sprechen. Missverständnisse können bei genauer Betrachtung (beim langsamen lesen) nicht entstehen.

Wir können je nach Perspektive – Vektoren bzw. Zufallsvariablen – Resultate der Linearen Algebra bzw. der Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden.

iii.) Wir haben die Anlageform mit Auszahlung R^f als Geldmarktkonto interpretiert; R^f ist dann die **Bruttoverzinsung** (also einschließlich der Rückzahlung in $t = 1$ des in $t = 0$ eingezahlten Betrags). Alternativ kann man **Geldmarktanteile** betrachten, deren Preis im Betrachtungszeitpunkt auf $R_0^f = 1$ normiert ist, d.h. die im Betrachtungszeit pari emittiert wurden. Die garantierte Auszahlung in $t = 1$ ist $R_1^f = R$. In diesem Fall ist der Preis bzw. die Auszahlung $R_1^f = R$ in $t = 0$ bekannt. Geldmarktanteile haben also einen Preis der sich in Mehrperiodenmodellen ändern kann, aber diese Änderung ist anders als bei den riskanten Wertpapieren schon vorab bekannt.

noch ausführlicher ....

Wir haben die Anlageform Geldmarkt aus zwei Gründen *extra* modelliert: (1) Diese Anlageform stellt **die risikolose Anlageform** dar (risikolos ist die Anlageform jedenfalls für eine Periode). (2) Diese Anlageform dient typischerweise als **Standard-Numeriare**; was das bedeutet werden wir später erläutern.

Numeriare .... Geld .... Auszahlung in Geldeinheiten ....

1.1.4 Definition: Eine **Handelsposition/Handelsstrategie/Portfol** wird durch einen Vektor $\mathbf{h} = (h_0, h_1, ..., h_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ repräsentiert. Dabei bezeichnet h_0 den am Geldmarkt investierten/geliehenen Betrag **in Geldeinheiten** und $h_i, i = 1, ..., N$ die Anzahl der **Stücke** des Wertpapiers mit der Wertpapiernummer i. Wir werden die für uns im folgenden selbstverständliche Angabe $\in \mathbb{R}^{N+1}$ oft weglassen, d.h. wenn nichts anderes angeben ist, dann ist ein $\mathbf{h}$ ein Vektor des $\mathbb{R}^{N+1}$, der eine Handelsposition repräsentiert.

Wenn wir **Geldmarktanteile** betrachten, dann entspricht h_0 dem **Bestand** der Geldmarktanteile, die in der **Einheit** Stücke gemessen werden.

1.1.5 Bemerkung: i.) Es sei $\mathbf{h}$ eine Handelsposition und $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Da wir $h_i \in \mathbb{R}$ zulassen, lassen wir insbesondere auch $h_i < 0$ zu; das sind sogenannte **Leerverkäufe**.

Dieser Text ist nicht der richtige Ort, um die teilweise komplexen institutionellen Details von Leerverkäufen zu erläutern. Nützlich ist aber die folgende Skizze: Wenn man Wertpapiere, die man nicht besitzt, verkaufen will, dann borgt man sich diese. Die Leihe wird von einem Vermittler organisiert. Man verkauft dann die geborgten Wertpapiere am Wertpapiermarkt. Am Ende der Leihfrist kauft man die Wertpapiere am Wertpapiermarkt und gibt sie zurück. Der Besitzer, dessen Wertpapiere geborgt und verkauft werden, bemerkt diesen Vorgang nicht. Während der Leihfrist anfallende Dividenden bzw. Coupons muss der Leerverkäufer an den Inhaber des geliehen Wertpapier zahlen.

..... insb Quelle zu den inst Details

Broker ....?

ii.) Wir behandeln die Fälle $h_0 < 0$ (man leiht sich Geld) und $h_0 > 0$ (man verleiht Geld) nicht separat als zwei Fälle mit unterschiedlichen Zinsen, sondern *einheitlich* $h_0 \in \mathbb{R}$. Die Verzinsung für eine Anlage am Geldmarkt und für die Kreditaufnahme auf dem Geldmarkt sind also gemäß Annahme gleich.

iii.) Die Annahme $h_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N$ bedeutet, dass wir die **beliebige Teilbarkeit** der Wertpapiere unterstellen. Für die *mathematische* Analyse ist diese Annahme wichtig. Insbesondere können wir Methoden und Ergebnisse der Linearen Algebra des $\mathbb{R}^n$ anwenden.

iv.) Die Wertpapierpreise S_t^i und der Zins r sind **exogen**. Das bedeutet insbesondere: Selbst wenn sich Investoren für ein sehr „großes" $\mathbf{h}$ (sehr große Nachfrage bzw. Angebot) entscheiden, ändern sich die Preise bzw. der Zins nicht.

Preisnehmer .... Ein Anleger müsste seine Nachfrage dosieren ....

1.1.6 Definition: Wir definieren die **Auszahlungsmatrix** (für alle Anlagealternativen und alle Zustände) des EPFMM als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R^f & S_1^1(\omega_1) & ... & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) \\ R^f & S_1^1(\omega_2) & ... & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R^f & S_1^1(\omega_K) & ... & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(K, N+1; \mathbb{R}).$$

In einer Spalte

$$\begin{pmatrix} S_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ S_1^i(\omega_K) \end{pmatrix}$$

stehen also die Auszahlungen einer Anlageform und in einer

Zeile

$$\begin{pmatrix} R^f & S_1^1(\omega_k) & ... & S_1^N(\omega_k) \end{pmatrix}$$

stehen die Auszahlungen der $N+1$ Anlageformen im Zustand ω_k. Die Auszahlung in $t=1$ des Portfolios $\mathbf{h}$ definieren[2] wir als

$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h}.$$

Ausgeschrieben haben wir also:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) &= R^f h_0 + S_1^1(\omega_1)h_1 + ... + S_1^N(\omega_1)h_N \\ \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) &= R^f h_0 + S_1^1(\omega_2)h_1 + ... + S_1^N(\omega_2)h_N \\ ... & \quad ... \\ \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega_K) &= R^f h_0 + S_1^1(\omega_K)h_1 + ... + S_1^N(\omega_K)h_N. \end{aligned}$$

Wir beachten, dass $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}$ je nach Perspektive eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. ein Vektor in $\mathbb{R}^K$ ist. Wenn wir $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}$ als Zufallsvariable auffassen, dann schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} &= h_0 R^f + h_1 S_1^1 + ... + h_N S_1^N \text{ bzw.} \\ \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}(\omega) &= h_0 R^f + h_1 S_1^1(\omega) + ... + h_N S_1^N(\omega). \end{aligned}$$

anstatt des Matrixprodukts $\mathbf{A}\mathbf{h}$.

Diese Definitionen bedeuten, dass wir *lineare Preise* unterstellen. Es gibt also **keine *Rabatt für Menüs***.

[2]Warum ist das eine Definition und keine Schlussfolgerung? Diskutieren Sie! Denken Sie insbesondere an Menüs in Restaurants.

Ferner definiert (beachte $R_0^f = 1$)

$$
\begin{aligned}
V_0^{\mathbf{h}} &= R_0^f h_0 + S_0^1 h_1 + ... + S_0^N h_N = \mathbf{h}^T \begin{pmatrix} R_0^f \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= (1 \quad S_0^1 \quad ... \quad S_0^N) \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= \bar{\mathbf{S}}_0^T \mathbf{h} \\
&= \mathbf{h}^T \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{h} \bullet \bar{\mathbf{S}}_0 = \bar{\mathbf{S}}_0 \bullet \mathbf{h}
\end{aligned}
$$

den **Anschaffungswert der Handelsposition h** in $t = 0$ (also den **Wert des Portfolios** in $t = 0$ bzw. **die Anschaffungskosten des Portfolios** in $t = 0$), wobei wir

erweiterte Auszahlung-matrix?

$$
\bar{\mathbf{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{S}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^f \\ \mathbf{S}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}
$$

definieren.

Wir werden gelegentlich $R_0^f = 1$ angeben, um daran zu erinnern, dass wir diese Anlageform als Geldmarktkonto und als Geldmarktanteile interpretieren können.

Manchmal ist die separate Behandlung/Notation des Geldmarktkontos lästig. Wir verwenden deshalb auch die Notation $S_0^0 = 1$ und $S_1^0 = R_1^f = R$

► Was wollen Anleger? Anleger bevorzugen ceteris paribus einen kleinen Wert $V_0^{\mathbf{h}}$ und ceteris paribus große Werte für $\mathbf{V}_{1,i}^{\mathbf{h}}$. Wir werden uns später genauer mit Präferenzen zu beschäftigen.

1.1.7 Definition: Es sei **h** eine Handelsstrategie. Dann heißt

$$\begin{aligned} G^{\mathbf{h}} &= V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} \\ &= R^f h_0 + S_1^1 h_1 + ... + S_1^N h_N - h_0 - h_1 S_0^1 - ... - h_N S_0^N \\ &= r h_0 + (S_1^1 - S_0^1) h_1 + ... + (S_1^N - S_0^N) h_N \end{aligned}$$

Gewinn[3] der Handelsstrategie **h**; es ist also $G^{\mathbf{h}}(\omega) = V_1^{\mathbf{h}}(\omega) - V_0^{\mathbf{h}}, \omega \in \Omega$).

Der **diskontierter Gewinn** der Handelsstrategie **h** wird durch

$$G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} - V_0^{\mathbf{h}} = \frac{1}{R_1^f} V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$$

definiert.

Wenn die Anschaffungskosten Null, dann heißt

$$G^{\mathbf{h}} = V_1^{\mathbf{h}}, V_0^{\mathbf{h}} = 0$$

[3] $G^{\mathbf{h}}$ ist nicht notwendigerweise nicht negatv! Gewinn-Verlust wäre vielleicht die bessere Bezeichnung.

kostenloser Gewinn und

$$G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} = \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}, V_0^{\mathbf{h}} = 0$$

kostenloser diskontierter Gewinn.

1.1.8 Bemerkung: Es sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsstrategie. Wenn man $V_1^{\mathbf{h}}$ als Vektor auffasst, dann muss man *etwas* aufpassen. Es ist dann streng genommen $G^{\mathbf{h}} = V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} := V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}\mathbb{1}$, wobei

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$V_0^{\mathbf{h}}$ ist eine reelle Zahl und $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{Ah}$ ein Vektor. Eigentlich ist $V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ (Vektor minus Skalar) nicht definiert. Wir werden in der Tat öfter Anlass haben von einem Vektor $\mathbf{v}$ einen Skalar α abzuziehen. Wir definieren

$$\mathbf{v} - \alpha := \mathbf{v} - \mathbb{1}\alpha.$$

1.2 Arbitrage

1.2.1 Definition: Eine Handelsposition $\mathbf{h}$ heißt **Arbitragemöglichkeit** oder einfach **Arbitrage**, wenn

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ **und**

ii.) $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$

gilt. Eine Arbitragemöglichkeit hat also einerseits Anschaffungskosten von Null und hat andererseits eine nicht-negative vom Nullvektor verschiedene zukünftige Auszahlung. Zu schön, um wahr zu sein.

▶ **Wir werden im Folgenden sehr ausführlich und genau charakterisieren, unter welche Umständen/Bedingungen es keine Arbitrage gibt.** Wir betrachten zur Einführung ein einfaches

1.2.2 Beispiel: Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es in diesem EPFMM eine Arbitragemöglichkeit?

Wenn $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$ eine Handelsstrategie mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist, dann $h_0 + 5h_1 = 0$. also $h_0 = -5h_1$. Für die Auszahlung gilt

$$\begin{aligned} V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{60}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{10}{9}h_0 + \frac{60}{9}h_1 \\ \frac{10}{9}h_0 + \frac{40}{9}h_1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \cdot 5h_1 + \frac{60}{9}h_1 \\ -\frac{10}{9} \cdot 5h_1 + \frac{40}{9}h_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix} h_1 \end{aligned}$$

Wenn $h_1 = 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Wenn $h_1 > 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Wenn $h_1 < 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit. Es kann also in diesem EPFMM **keine Arbitragemöglichkeiten** geben.

1.2.3 Beispiel: Es sei diesmal $r = \frac{1}{3}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es in diesem EPFMM eine Arbitragemöglichkeit?

Es sei $\mathbf{h} = (5, -1)^T$. Dann ist $V_0^{\mathbf{h}} = h_0 + S_0 h_1 = 5 - 5 \cdot 1 = 0$. Für die Auszahlung gilt

$$V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{12}{9} & \frac{60}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}$$

Also $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$. Wir haben eine **Arbitrage** gefunden!

Arbitrageidee: In beiden Zuständen hat die Anlage am Geldmarkt eine mindestens so hohe Rendite, wie das Wertpapier. Die Rendite am Geldmarkt beträgt $\frac{3}{9}$ in beiden Zuständen. Die Wertpapierrendite ist $\frac{3}{9}$ in ω_1 und $-\frac{1}{9}$ in ω_2. Wir *shorten* das Wertpapier (also $h_1 < -1$) und legen die daraus erhalten Mittel am Geldmarkt an (also $h_0 < 5$); das bedeutet $\mathbf{h} = (5, -1)^T$.

Im vorhergehenden Beispiel war die Geldmarktrendite *nur* $\frac{1}{9}$. Im Zustand ω_1 ist die Wertpapierrendite $\frac{3}{9}$ größer als diese Geldmarktrendite und in Zustand ω_2 ist die Wertpapierrendite $-\frac{1}{9}$ kleiner.

1.2.4 Bemerkung: Für $K = N + 1 = 2$ ist es sehr einfach, Arbitragemöglichkeiten – wenn es welche gibt – zu finden. Wenn die Rendite der riskanten Anlageform in beiden Zuständen mindestens so hoch wie die der Anlage am Geldmarkt und in einem Zustand höher, dann kauft man das riskante Wertpapier auf Kredit. Ist andererseits die Geldmarktrendite in beiden Zuständen mindestens so hoch wie die Rendite des riskanten Wertpapiers, dann verkaufen wir das riskante Wertpapier (leer) und legen den Leerverkaufserlös am Geldmarkt an.

1.2.5 Bemerkung: Eine Handelsstrategie $\mathbf{h}$ ist genau dann eine Arbitrage, wenn

i.) $V_0^{\mathbf{h}} = 0$,

ii.) $\mathbf{V_1^h} \geq \mathbf{0}$ **und** $V_1^{\mathbf{h}}(\omega) > 0$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$.

1.2.6 Bemerkung: Für $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ gilt $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$. Deshalb *reicht* $V_1^{\mathbf{h}} \geq 0$ als Charakterisierung für eine Arbitrage nicht aus. Andererseits setzen wir bei einer Arbitrage auch nicht voraus, dass $V_1^{\mathbf{h}}(\omega) > 0$ für alle ω gilt.

1.2.7 Bemerkung: i.) Gelegentlich findet man die Aussage, dass eine Arbitrage ein risikoloser Gewinn[4] sei. Das ist aber mindestens missverständlich. Wenn ein Anleger die Strategie $\mathbf{h} = (1, 0, ..., 0)^T$ wählt und der Zins $r > 0$ positiv ist, dann ist der Gewinn $V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}} = 1 + r - 1 = r > 0$ risikolos und strikt positiv; aber $\mathbf{h}$ ist keine Arbitrage!

ii.) Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn es einen **kostenlosen** nicht negativen von Null verschiedenen risikolosen

[4]Gemeint ist ein nicht negativer von Null verschiedener Gewinn.

Gewinn gibt, d.h. ein $\mathbf{h}$ mit

$$V_0^{\mathbf{h}} = 0$$
$$0 \neq V_1^{\mathbf{h}} = G_1^{\mathbf{h}} \geq 0.$$

Das ist so, da $V_1^{\mathbf{h}} = G_1^{\mathbf{h}}$ unter der Vorsetzungen $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist.

1.2.8 Bemerkung: Für den diskontierten Gewinn $G^{\mathbf{h},*} = V_1^{\mathbf{h},*} - V_0^{\mathbf{h}} = \frac{1}{Rf}V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ ist die Geldmarktposition h_0 irrelevant: Wenn $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$ zwei Handelspositionen mit $\mathbf{h}_{1,i} = \mathbf{h}_{2,i}, i = 1, ..., N$ sind, dann ist $G^{\mathbf{h}_1,*} = G^{\mathbf{h}_2,*}$; unabhängig von den Werten $\mathbf{h}_{1,0}$ bzw. $\mathbf{h}_{2,0}$.

1.2.9 Bemerkung: Es **gibt** einen weiteren Zusammenhang – außer dem aus 1.2.7 – zwischen Arbitrage und Gewinn, der durch die folgenden beiden Behauptungen erklärt wird. Relevant ist dabei der **diskontierte Gewinn**.

Behauptung: Es **gibt** genau dann eine Arbitrage, wenn es ein $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$ gibt; dabei ist $G^{\mathbf{h},*} = \frac{1}{Rf}V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}$ der **diskontierte Gewinn** der Handelsposition $\mathbf{h}$.

Behauptung: Ist $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_N)^T \in \mathbb{R}^N$ eine Handelsposition für die riskanten Anlageformen mit $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$. Dann ist $\mathbf{h}' = (h_0, h_1, ..., h_N), h_0 = -\mathbf{h} \bullet \mathbf{S}_0$ eine Arbitrage.

1.2.10 Bemerkung: Wir beobachten

$$\begin{aligned} & G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{R^f} V_1^{\mathbf{h}} \geq V_0^{\mathbf{h}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} \geq R^f \\ \Leftrightarrow\ & \frac{V_1^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} - 1 \geq r \\ \Leftrightarrow\ & \frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} \geq r. \end{aligned}$$

Wenn die Renditen $\frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}}$ der Handelsstrategie (die unabhängig von h_0 ist) in allen Zuständen mindestens so hoch wie die Geldmarktrendite und von Null verschieden ist, dann gibt es eine Arbitrage.

Wir können auch

$$\frac{V_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}} - r > 0$$

betrachten. Wenn es eine Strategie mit einer (unter allen Umständen) nicht-negativen von Null verschiedenen **Überschussrendite** gibt, dann gibt es eine Arbitarge

1.2.11 Bemerkung(Geometrische Interpretation von $\mathbf{0} \neq G^{\mathbf{h},*} \geq \mathbf{0}$): Ein diskontierter Arbitrage-Gewinn liegt also im ersten *Quadranten* (ohne den Nullpunkt). Diese Beobachtung wird sich noch als besonders nützlich erweisen Baustelle ....

1.2.12 Bemerkung: Wenn $\mathbf{h}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ eine sogenannte

Selbstmord-Handelsstrategie mit $\mathbf{0} \neq \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \leq \mathbf{0}$ ist, dann ist $-\mathbf{h}$ eine Arbitrage. Ist $\mathbf{h}$ eine Arbitrage, dann ist $-\mathbf{h}$ eine Selbstmord-Strategie.

1.2.13 Bemerkung: Bei Arbitragefreiheit gilt: Wenn $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ ist, dann kann $\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ nicht gelten. In Beweisen werden wir das so machen: Wir zeigen (durch **Fallunterscheidung**) für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ gibt es stets ein j mit $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$.

Bei Arbitragefreiheit gilt *sogar*: Wenn $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsposition mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ und $V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ ist, dann gibt es i, j mit $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_i) > 0, V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$. Würde $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_i) \leq 0$ für alle $i \neq j$ und $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_j) < 0$ gelten, dann wäre $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Selbstmordstrategie. Dann ist $-\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.14 Beispiel: Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Dann gilt Arbitragefreiheit.

Wenn $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$ eine Handelsstrategie mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ ist, dann ist $h_0 + 5\,h_1 = 0$. Also $h_0 = -5\,h_1$. Für die Auszahlung gilt

$$V_1^{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix} h_1$$

$V_1^{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}$ impliziert $h_1 \neq 0$. Also gibt es zwei Fälle.

i.) Wenn $h_1 > 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_2) < 0$. Also keine

Arbitragemöglichkeit.

ii.) Wenn $h_1 < 0$ gilt, dann ist $V_1^{\mathbf{h}}(\omega_1) < 0$. Also keine Arbitragemöglichkeit.

Es kann also in diesem EPFMM keine Arbitragemöglichkeiten geben.

Wie in der vorherigen Bemerkung angegeben, gibt es im Fall $h_1 > 0$ einerseits einen Zustand mit einer negativen Auszahlung; nämlich $j = 2$. Es gibt aber auch einen Zustand mit einer positiven Auszahlung; nämlich $j = 1$.

1.2.15 Bemerkung: Arbitragemöglichkeiten sind beliebig skalierbar: Wenn $\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit ist, dann ist für alle $\alpha > 0$ auch $\alpha\,\mathbf{h}$ eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.16 Satz: $\mathbf{h}$ ist genau dann eine **Arbitragemöglichkeit**, wenn $V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}}) > 0$.

1.2.17 Satz: Wenn es eine Handelsstrategie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} < 0, V_1^{\mathbf{h}} \geq \mathbf{0}$ gibt, dann gibt es eine Arbitragemöglichkeit.

1.2.18 Bemerkung: Handelsstrategien wie im vorhergehenden Satz werden in anderen Quellen ebenfalls Arbitragemöglichkeit genannt (so beispielsweise in Duffie [9, Seite 3]). Solche Handelsstrategie sind noch besser als die Arbitragemöglichkeiten gemäß unserer Definition: Man hat den finanziellen

Vorteil schon in $t = 0$. Man könnte diesen Vorteil auf dem Geldmarkt anlegen und hätte dann **in jeden Zustand** eine positive Auszahlung; also eine *starke* Arbitrage.

1.2.19 Definition: Das EPFMM heißt **arbitragefrei**, wenn es keine Arbitrage gibt.

1.2.20 Bemerkung: Wir werden im folgenden Arbitragefreiheit als eine *plausible und vernünftige* Eigenschaft eines EPFMM auffassen.[5]

Wenn es eine Arbitrage gäbe, dann könnte ein Anleger seinen Nutzen – diesen Begriff werden wir formal erst später einführen – grenzenlos steigern. *Übliche* Optimierungsprobleme der Portfoliotheorie hätten keine Lösung (vgl. Duffie [9, S. 5f]).

Wenn es eine Arbitrage gäbe, dann wäre zudem die Annahme exogener Preise sehr fragwürdig. Anleger hätten schließlich Interesse an SEHR großen Arbitragepositionen. Es ist dann plausibel, dass sich Preise so anpassen, dass die Arbitragemöglichkeit verschwindet.

1.2.21 Satz (Law of one price, LOOP): Wenn das EPFMM arbitragefrei ist, dann gilt das Law of one price (LOOP):

$$\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}_1} = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}_2} \Rightarrow V_0^{\mathbf{h}_1} = V_0^{\mathbf{h}_2}.$$

[5] Sollte Ihnen eine Arbitrage bekannt sein, so wäre es sehr wünschenswert, wenn Sie mir diese Strategie vertraulich mitteilen würden. Email an mj ät mathstat.de

In Worten: Wenn zwei Positionen identische Auszahlungsprofile haben, dann müssen sie bei Arbitragefreiheit auch den gleichen Preis haben.

1.3 Risikoneutralwahrscheinlichkeiten

▶ Es ist einfach eine sichere Auszahlung $\mathbf{X}$ zu bewerten. Der faire Preis muss $p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{1+r}$. Wenn die Auszahlung riskant ist, dann könnten man versucht sein, die Formel $p_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{X})}{1+r}$ zur Bewertung zu verwenden. Die Formel funktioniert sogar, aber mit einen Twist. Der Twist besteht darin, dass man nicht die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, ..., p_K$ nimmt, sondern solche Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, ..., q_K$, so dass die Gleichung stimmt. Das klingt nach Pippi Langstrumpf: ich mach mir die Welt; widewide wie sie mir gefällt. In der Tat ist die *Erfindung* ein Geniestreich, der eine neue Welt erschafft: die $\mathbb{Q}$-Welt bzw. die Risikoneutral-Welt. In dieser Welt kann man, wie wir sehen werden, großartige Dinge machen. Die folgenden Definition ist von herausragender Bedeutung.

▶ Bewertung (das erste mal) ...

▶ Natürlich ergibt sich die Frage, ob (unter welchen Bedingungen) es solche magischen Wahrscheinlichkeiten wirklich gibt. Wir werden sehen, dass des solche WAhrscheinlichkeiten genau dann gibt, es keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Es fügt sich also alles ganz wunderbar.

1.3.1 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ heißt **Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß** oder **Martingalwahrscheinlichkeitsmaß**, falls

i.) $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

ii.) Für alle $i = 1, ..., N$ gilt

$$\begin{aligned} S_0^i &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1^i}{R^f}\right) = \sum_{k=1}^{K} q_k \frac{S_1^i(\omega_k)}{R^f} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1^{i*}\right) = \sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i*}(\omega_k). \end{aligned}$$

Die N Gleichungen kann man mit Matrizen in einer Gleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{S}_\mathbf{1}^*)^T \mathbf{q}.$$

Dabei ist $q_i = q(\omega_i) = \mathbb{Q}(\omega_i)$ und

$$\mathbf{S}_1^* = \begin{pmatrix} \frac{S_1^1(\omega_1)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R^f} \\ \frac{S_1^1(\omega_2)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R_1^f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{S_1^1(\omega_K)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R^f} \end{pmatrix} \in M(K, N, \mathbb{R})$$

ist die Matrix der **diskontierten Wertpapierauszahlungen** (also ohne eine Spalte für den Geldmarkt).

Die **Menge aller Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaße** bezeichnen wir mit $\mathbb{M}$.

1.3.2 Bemerkung: i.) Ein Vektor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^K$ mit $q_i > 0$ für alle $i = 1, ..., K$ definiert genau dann eine Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\omega_i) = q_i$, wenn

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$$

gilt. Dabei ist

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R^f} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R^f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R^f} \end{pmatrix} \in M(K, N+1, \mathbb{R})$$

die Matrix der diskontierten Auszahlungen aller Anlageformen und

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix}.$$

ii.) Wir erhalten im Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$ eine Gleichung je Anlageform: N für die N Basiswertpapiere und eine für den Geldmarkt; also insgesamt $N + 1$ Gleichungen. Dabei entspricht die Gleichung für den Geldmarkt gerade der Gleichung, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins addieren. Eine Lösung des Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$ ist aber nicht automatisch eine risikoneutrale Zähldichte. Die Lösung muss zudem $q_i > 0$ erfüllen!

1.3.3 Beispiel: i.) Es sei wieder $r = \frac{1}{9}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$. Gibt es Risikoneutralwahrscheinlichkeiten?

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$. Wir haben also Risikoneutralwahrscheinlichkeiten gefunden!

ii.) Es sei jetzt $r = \frac{1}{3}$, $S_0 = 5$, $S_1(\omega_1) = \frac{60}{9}, S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

Wir betrachten wieder $\bar{\mathbf{S}}_0 = (\mathbf{A}^*)^T \boldsymbol{q}$; diesmal erhalten wir das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $q_1 = 1, q_2 = 0$. Diese Werte bilden jedoch keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten, denn $q_2 = 0$. Es kann keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten geben, denn die müssten das obige lineare Gleichungssystem lösen. Dieses lineare Gleichungssystem hat aber nur die eine Lösung $q_1 = 1, q_2 = 0$ und die definieren keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

Für die Spezifikation i.) gab es keine Arbitragemöglichkeit aber es gab Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Für die Spezifikation ii.) gab es Arbitragemöglichkeiten aber es gab keine Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Wir werden *gleich* sehen, dass das kein Zufalls ist.

1.3.4 Bemerkung: Wenn $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ist, dann gilt für alle Basiswertpapiere

$$S_0^i = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_1^i}{R^f}\right).$$

Wir erhalten also den aktuellen Preis als Erwartungswert des diskontierten zukünftigen Wertes. Es ist sehr wichtig, dass diese Identität mit $\mathbb{P}$ (anstatt mit $\mathbb{Q}$) im Allgemeinen nicht gilt. Im Allgemeinen ist $S_0^i \neq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_1^i/R^f\right)$. Wären Anleger risikoneutral (auf die formale Definition von risikoneutral müssen wir noch warten), dann würde $S_0^i = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_1^i/R^f\right)$ gelten. Dementsprechend ist die Formulierung populär, dass in der $\mathbb{Q}$-Welt Risikoneutralität gilt. Es *gibt* aber nur eine Welt; die $\mathbb{P}$-Welt. Die $\mathbb{Q}$-Welt ist eine genial ausgedachte Welt der Finanzmathematik.

Das bedeutet also nicht, dass man für die Anwendbarkeit der Formeln/Theorie unterstellen würde, dass Anleger tatsächlich risikoneutral sind. Wenn man mit gewechselten Wahrscheinlichkeiten rechnet, dann kann man so rechnen, **als ob** Anleger risikoneutral wären. **Die transformierten Wahrscheinlichkeiten erfassen dabei die Risikoaversion**. Im Fall K kann man folgendes Beobachten. Der Anleger nutzt rechnet mit pessimistischeren Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses wird hoch gesetzt; das beobachten wir jetzt in einem Beispiel.

1.3.5 Bemerkung: Um die Rolle der Risikoneutralwahrscheinlichkeiten zu verstehen, betrachten wir eine Lotterie mit $X^1(\omega_1) = 50, X^1(\omega_2) = 100$ und $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = p = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1 - p = \frac{1}{2}$. Wenn man an dieser Lotterie teilnehmen will, dann muss man einen Preis V zahlen. Wie kann man den (höchsten für Kunden akzeptablen) Preis der Lotterie charakterisieren? Eine denkbare Antwort ist $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^1) = 75$. Dies ist schließlich die erwartete Auszahlung (der durchschnittliche Gewinn bei ∞-vielen unabhängigen Wiederholungen). Diese Antwort ist jedoch unbefriedigend. Angenommen wir betrachten eine zweite Lotterie: $X^2(\omega_1) = 70, X^2(\omega_2) = 80$. Dann ist (ebenfalls) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^2) = 75$. Die beiden Lotterien hätten also – wenn man sich am Erwartungswert orientiert – den gleichen Preis. Diese zweite Lotterie hat aber ein **geringeres Risiko**: Bei der zweiten Lotterie verliert man allenfalls 5 und bei der ersten 25. Angenommen wir betrachten eine dritte Lotterie: $X^3(\omega_1) = 75, X^3(\omega_2) = 75$. Dann ist (ebenfalls) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X^3) = 75$. Alle drei Lotterien hätten – wenn man sich am Erwartungswert orientiert – den gleichen Preis. Es ist aber unbefriedigend, dass die unterschiedlichen Lotterien, den gleichen Preis haben sollen, obwohl sie unterschiedlich riskant sind. Es ist vielmehr plausibel, dass von den zwei Lotterien mit gleichem Erwartungswert diejenige mit einem höheren Risiko[6] einen geringeren Preis hat (unpopulärer ist).

Angenommen wir würden beobachten (auf einem gut funktionierenden Markt für Lotterien), dass die Lotterie X^1 für $V = 70$ gehandelt wird. Diesen Preis kann man als Erwartungswert charakterisieren. Man muss dazu aber **die Wahrscheinlichkeiten wechseln**. Wir beobachten

$$\begin{aligned} 70 &= q \cdot 50 + (1-q) \cdot 100 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses ω_1 auf den höheren Wert $\frac{3}{5}$ (anstatt $\frac{1}{2}$) gesetzt wird, dann wird die Aversion gegen Risiko erfasst und der Preis V der Lotterie X^1 lässt sich (trotzdem) als Erwartungswert schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X^1) &= q \cdot X^1(\omega_1) + (1-q) \cdot X^1(\omega_2) \\ &= \frac{3}{5}50 + \frac{2}{5}100 = 70 = V. \end{aligned}$$

Also: Nach dem **Wechsel der Wahrscheinlichkeiten** (von $\mathbb{P}$ zu $\mathbb{Q}$) liefert **der mit $\mathbb{Q}$ berechnete Erwartungswert den beobachteten Preis**.

Wir können so rechnen, **als ob** Risikoneutralität gelten würde, obwohl sie tatsächlich nicht gilt. Die Wahrscheinlichkeit des ungünstigen Ereignisses wird dabei hoch gesetzt. Dadurch wird die Risikoaversion erfasst.

[6] Wir gehen hier mit dem Begriff Risiko naiv um. Später werden wir sehen, dass nicht jedes Risiko preis-relevant ist. ....

Und bei anderen Lotterien? Ist der Marktpreis für die zweite Lotterie

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X^2) = \frac{3}{5}70 + \frac{2}{5}80 = 74?$$

Das wäre sehr bequem, denn dann könnte man alle Bewertungsaufgaben mit dem Wechsel zu **einem** Wahrscheinlichkeitsmaß linear lösen (der Erwartungswert ist ein linearer Operator).

Es wird sich in der Tat zeigen, dass man für die Wertpapierbewertung nur **ein** für alle Bewertungsaufgaben das **gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß** verwenden kann; und nicht etwa für jedes Wertpapier eine spezifische Anpassung der Wahrscheinlichkeiten.

1.3.6 Bemerkung: i.) Die Gleichung $S_0^{i*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_1^{i*}\right)$ bedeutet, dass **diskontierte** Wertpapierpreise in der $\mathbb{Q}$-Welt **im Durchschnitt über die Zustände unverändert** bleiben (von $t = 0$ bis $t = 1$).

ii.) Es gilt (nur geringfügig anders formuliert als in i.)) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*}) = 0$. Die Aussage $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*}) = 0$ bedeutet, dass die erwarteten Zuwächse $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Delta S_1^{i*})$ der diskontierten Wertpapierpreise unter $\mathbb{Q}$ Null sind. Die diskontierten Wertpapierpreise bleiben in der $\mathbb{Q}$-Welt *durchschnittlich* unverändert.

1.3.7 Bemerkung: Wir notieren – ebenfalls für den späteren Gebrauch – die **geometrische** Form der obigen Aussage:

$$\begin{aligned}
&S_0^i = \sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i*}(\omega_k)\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{K} q_k S_1^{i*}(\omega_k) - S_0^i \sum_{k=1}^{K} q_k = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{K} q_k (S_1^{i*}(\omega_k) - S_0^i) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\mathbf{q} \perp (S_1^{i*}(\omega_1) - S_0^i, ..., S_1^{i*}(\omega_K) - S_0^i)^T\\
\Leftrightarrow\ &\mathbf{q} \perp (\Delta S_1^{*i}).
\end{aligned}$$

Also: Die Zuwächse ΔS_1^{*i} der diskontierten Wertpapierpreise stehen **orthogonal** (bezüglich des Standardskalarprodukts) auf der risikoneutralen Zähldichte $\mathbf{q}$.

1.3.8 Defintion: Es sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Handelsstrategie. Wir definieren die **diskontierte Auszahlung** der Handelsstrategie $\mathbf{h}$:

$$(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) := \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R^f}.$$

Ausgeschrieben gilt:

$$\begin{aligned}
(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) &= \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R^f} = \frac{R^f h_0 + S_1^1(\omega_k) h_1 + ...S_1^N(\omega_k) h_N}{R^f}\\
&= h_0 + \frac{S_1^1(\omega_k)}{R^f} h_1 + ... + \frac{S_1^N(\omega_k)}{R^f} h_N.
\end{aligned}$$

1.3.9 Bemerkung: Es sei

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R^f} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R^f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R^f} \end{pmatrix} \in M(K, N+1, \mathbb{R})$$

die Matrix der diskontierten Auszahlungen aller Anlageformen; also einschließlich des Geldmarktes.

Die obige Gleichung $(V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) = h_0 + \frac{S_1^1(\omega_k)}{R^f} h_1 + \ldots + \frac{S_1^N(\omega_k)}{R^f} h_N$ für die Zufallsvariablen kann man mit Matrizen auch so angeben

$$(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{S_1^1(\omega_1)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_1)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_1)}{R^f} \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_2)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_2)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_2)}{R^f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{S_1^1(\omega_K)}{R^f} & \dots & \frac{S_1^{N-1}(\omega_K)}{R^f} & \frac{S_1^N(\omega_K)}{R^f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = \mathbf{A}^* \mathbf{h}.$$

1.3.10 Satz: $\mathbf{q}$ definiert genau dann eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit $\mathbb{Q}$, wenn $\mathbf{q} \gg 0$ und für alle Handelsstrategien $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gilt:

$$\begin{aligned} V_0^{\mathbf{h}} &= \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) \frac{V_1^{\mathbf{h}}(\omega_k)}{R^f} = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) (V_1^{\mathbf{h}})^*(\omega_k) \\ &= \mathbf{q}^T (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \mathbf{q} \bullet (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((V_1^{\mathbf{h}})^*\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right). \end{aligned}$$

Die Gleichung $(V_0^{\mathbf{h}})^* = V_0^{\mathbf{h}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left((V_1^{\mathbf{h}})^*\right)$ bedeutet, dass **sich das Prinzip der Risikoneutralbewertung von den Basiswertpapieren auf die Auszahlung beliebiger Handelspositionen fortsetzen lässt**. Diese **Fortsetzungseigenschaft** ist sehr nützlich und von grundsätzlicher Bedeutung!

Wir haben oben in 5 Gleichungen 5 Varianten der gleichen Aussage angegeben. Es ist je nach Zusammenhang eine der Varianten bequemer, deshalb ist die Redundanz sinnvoll.

1.3.11 Bemerkung: Wir haben früher festgestellt, dass für eine risikoneutrale Zähldichte $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} \perp (\Delta S_1^{*i})$$

gilt. Wir erhalten auch hier eine Fortsetzungseigenschaft von den Basisprodukten auf alle erreichbaren Auszahlungsprofile. Es gilt also analog für alle Handelsstrategien $\mathbf{h}$ und deren Auszahlung $V_1^{\mathbf{h}*}$

$$\mathbf{q} \perp (\Delta(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^*), \Delta(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}*} - V_0^{\mathbf{h}}$$

und für alle $\mathbf{h}$ mit $V_0^{\mathbf{h}} = 0$ gilt

$$\mathbf{q} \perp (\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^*.$$

Wir beobachten, dass $(\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}})^* = \mathbf{V}_1^{\mathbf{h}*} - V_0^{\mathbf{h}} = G^{\mathbf{h},*}$. Also ist die risikoneutrale Zähldichte orthogonal zum diskontierten Gewinn.

1.3.12 Satz: Es sei $\mathbb{Q}$ eine Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß und $\mathbf{h}$ eine Handelsstrategie mit $V_0^{\mathbf{h}} > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbf{V}_1^{\mathbf{h}} - V_0^{\mathbf{h}}}{V_0^{\mathbf{h}}}\right] = r^f.$$

Alle Anlageformen und sogar alle erreichbaren Profile haben in der $\mathbb{Q}$-Welt die **gleiche erwartete Rendite**; nämlich die Rendite der risikolosen Anlageform. In der *echten* Welt (also in der $\mathbb{P}$-Welt) mit risikoaversen Anlegern kann das *natürlich* nicht gelten. Risikoaverse Anleger wollen für die Übernahme von Risiken mit einer höheren erwarteten Rendite entschädigt werden. Wir werden uns später ausführlich mit der **Risikoprämie** beschäftigen. wo? ....

1.4 Der erste Hauptsatz der Assetbewertung

Für die Formulierung und den Beweis des 1. Hauptsatzes sind die folgenden Vorbereitungen nützlich. Die folgenden Argumente orientieren sind an Pliska [35, Seite 13 ff] und Williams [48, Seite 34 ff].

1.4.1 Satz: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \in \mathbb{M} &\Leftrightarrow \mathbf{q} \gg 0, \sum_{i=1}^{K} q_i = 1, \mathbf{q} \perp \mathcal{V}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q} \in \mathcal{V}^{*\perp} \cap \mathcal{P}^+,\end{aligned}$$

wobei[7]

$$\mathcal{V}^* = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}})^*, V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\},$$
$$\mathcal{P}^+ = \{\mathbf{p} \mid \sum_{k=1}^{K} p_i = 1, \mathbf{p} \gg 0\}.$$

1.4.2 Bemerkung: i.) Wir bemerken, dass $\mathcal{V}^*$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^K$ ist. $\mathcal{V}^*$ ist der Unterraum der **kostenlos erreichbaren diskontierten Auszahlungen**.

ii.) Es sei

$$\mathbb{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{X} \neq \mathbf{0}\}.$$

$\mathbb{A}$ ist die Menge aller (auch möglicherweise nicht erreichbaren) denkbaren Auszahlungen, die – wenn sie kostenlos erreichbar sind – zu **Arbitragemöglichkeiten** gehören.

Arbitragefreiheit bedeutet demnach $\mathcal{V}^* \cap \mathbb{A} = \emptyset$.

iii.) Es sei

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}}), V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\}.$$

Es gilt: $\mathcal{V} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\mathcal{V}^* \neq \emptyset$. Die Menge $\mathcal{V}$ ist *natürlicher* als $\mathcal{V}^*$, trotzdem verwenden wir $\mathcal{V}^*$. Es gilt: $\mathbf{q}$ definiert genau dann ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\mathbf{q} \gg 0, \sum_{i=1}^K q_i = 1, \mathbf{q} \perp \mathcal{V}^*$ gilt. In dieser Äquivalenz ist $\mathcal{V}^*$ relevant und wir interessieren uns für Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

[7] $\mathbf{x} \gg 0$ bedeutet $x_i > 0$ für alle i.

1.4.3 Satz über die trennende Hyperebene: Es sei U ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^K$ und $C \subset \mathbb{R}^K$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge von $\mathbb{R}^K$ und es gelte $U \cap C = \emptyset$. Dann gibt es eine Hyperebene $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} = 0\}$ mit $U \subset H$ und $\mathbf{p} \bullet \mathbf{n} > 0$ für alle $\mathbf{p} \in C$.

Wir beachten auch: Wegen $U \subset H$ gilt auch für alle $\mathbf{u} \in U$ die Orthogonalitätseigenschaft $\mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0$.

Beweis: Vgl. Williams [48, Abschnitt 3.6].

1.4.4 Erster Hauptsatz: Es sei

$$\mathcal{V}^* = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} = (V_1^{\mathbf{h}})^*, V_0^{\mathbf{h}} = 0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}\},$$
$$\mathbb{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K : \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{X} \neq \mathbf{0}\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{V}^* \cap \mathbb{A} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{M} \neq \emptyset.$$

Es gibt genau dann ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß, wenn Arbitragefreiheit gilt.

1.4.5 Bemerkung: Wenn es ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß gibt, dann können wir die Risikoneutralbewertungsmethoden verwenden. Das wäre schön. Arbitragefreiheit ist eine vernünftige Annahme. Genau dann wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, dann gibt es ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß. Es fügt sich also sehr schön.

Der erste Hauptsatz heißt aus mit gutem Grund **Haupt**satz. Genau unter der vernünftigen Voraussetzung der Arbitragefreiheit gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, so dass

$$V_0^{\mathbf{h}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{1+r}\right).$$

1.5 Bewertung bedingter Auszahlungen

Die Bewertung von **Derivaten** gehört zu den Basiskompetenzen eines Finanzmathematikers. Wir definieren bedingte Auszahlungen, die uns als Modell für Derivate dienen.

1.5.1 Definiton: Eine **bedingte Auszahlung**[8] ist eine Zufallsvariable[9] $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \mathbf{X}(\omega)$.

1.5.2 Definiton: Eine bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$ heißt **replizierbar** oder **erreichbar**, wenn es eine Handelsstrategie $\mathbf{h}$ mit $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{X}$ gibt. $\mathbf{h}$ heißt dann die **replizierende Handelsstrategie** für $\mathbf{X}$. $V_0^{\mathbf{h}}$ nennt man die **Replikationskosten** von $\mathbf{X}$.

1.5.3 Bemerkung: Wir bemerkten, dass die Replikationskosten für **$\mathbf{X}$ wohldefiniert** sind. In der Tat: Wir bemerken, dass die Replikationskosten unabhängig von der replizierenden Strategie sind (wegen LOOP, vgl. Satz 1.2.21): Wenn $\mathbf{h}_1$

[8] Die Auszahlung erhält der Inhaber im Zeitpunt $t = 1$.

[9] Zufallsvariablensind im Allgemeinen messbar. Die müssen wir hier nicht angeben, da $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist.

und $\mathbf{h}_2$ beide das Profil $\mathbf{X}$ replizieren, dann haben $\mathbf{h}_1$ und $\mathbf{h}_2$ die gleichen Anschaffungskosten, d.h. es gilt $\mathbf{V}_0^{\mathbf{h}_1} = \mathbf{V}_0^{\mathbf{h}_2}$.

1.5.4 Bemerkung: $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{X}$ gilt genau dann, wenn $\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$ gilt. Die Frage nach der Replizierbarkeit entspricht also der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$. In der Terminologie der Linearen Algebra: $\mathbf{X}$ ist in dem Raum, der von den Spalten von $\mathbf{A}$ erzeugt wird: $\mathbf{X} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

1.5.5 Definiton: Wir betrachten ein arbitragefreies EPFMM und fügen eine weitere Anlagemöglichkeit hinzu. $p_{\mathbf{X}}$ sei der Preis zu dem der Anleger das Finanzprodukt mit der Auszahlung $\mathbf{X}$ kaufen kann. Wenn das **erweiterte EPFMM** arbitragefrei bleibt, dann heißt der Preis $p_{\mathbf{X}}$ **mit Arbitragefreiheit vereinbar** bzw. **fair**.

Die Auszahlungsmatrix **des erweiterten EPFMM** bezeichnen wir mit

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} R_1^f & S_1^1(\omega_1) & ... & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) & X(\omega_1) \\ R_1^f & S_1^1(\omega_2) & ... & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) & X(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1^f & S_1^1(\omega_K) & ... & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) & X(\omega_K) \end{pmatrix} \in M(K, N+2; \mathbb{R})$$

und den Vektor der Preise des erweiterten EPFMM mit

$$\bar{\bar{S}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{S}_0 \\ p_{\mathbf{X}} \end{pmatrix}.$$

▶ Die Aufgabe des Finanzmathematikers besteht jetzt darin, den fairen Preis oder die fairen Preise zu ermitteln. Wir lernen zunächst zwei Bewertungsmethoden kennen: Bewertung durch Replikation und das Risikoneutralbewertungsprinzip. Später werden wir drei weitere Methoden kennen lernen.

1.5.6 Satz (Bewertung durch Replikation): Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{X}$ mit der Handelsstrategie $\mathbf{h}$ replizierbar, d.h. $V_1^{\mathbf{h}} = \mathbf{A}\mathbf{h}$. Dann ist

$$p_{\mathbf{X}} = V_0^{\mathbf{h}}$$

der einzige faire Preis für $\mathbf{X}$.

1.5.7 Satz (Risikoneutralbewertungsprinzip): Das EPFMM sei arbitragefrei und $\mathbf{X}$ eine replizierbare bedingte Auszahlung. Dann gilt für den fairen Preis von $\mathbf{X}$

$$p_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right),$$

wobei $\mathbb{Q}$ (irgend-)ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß ist.

1.5.8 Bemerkung: Wenn für alle ω^* Derivate mit Auszahlung

$$\mathbf{X}_{\omega^*}(\omega) = \begin{cases} R^f & : \text{falls } \omega = \omega^* \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

für $\mathbf{p}_{\mathbf{X}_{\omega^*}}$ gehandelt werden (oder durch Portfolios $\mathbf{h}_{\omega^*}$ repliziert werden können), dann erhält man eine Technik, um die

Risikoneutralwahrscheinlichkeiten zu ermitteln:

$$(V_0^{\mathbf{h}_{\omega^*}} =) \quad \mathbf{p}_{\mathbf{X}_{\omega^*}} = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{X}_{\omega^*}}{R^f}\right) = \sum_{\omega} \mathbb{Q}(\omega^*)\frac{\mathbf{X}_{\omega^*}}{R^f} = \mathbb{Q}(\omega^*).$$

Da sich diese Wahrscheinlichkeiten aus den beobachteten Preisen (implizit) ergeben, spricht man von **impliziten Risikoneutralwahrscheinlichkeiten**. Man kann auch sagen, dass die Preise die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten offenlegen.

Die **impliziten Risikoneutralwahrscheinlichkeiten** kann man auch auf Basis der folgenden bedingten Auszahlungen ermitteln:[10]

$$\mathbf{X}_{\omega^*}^{\mathrm{BF}}(\omega) = \begin{cases} 1 & : \text{falls } \omega = \omega^* \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Man ermittelt Handelsstrategie $\mathbf{h}_{\omega^*}^{\mathrm{BF}}$, die $\mathbf{X}_{\omega^*}^{\mathrm{BF}}$ replizieren. Dann gilt[11]

$$R^f V_0^{\mathbf{h}_{\omega^*}^{\mathrm{BF}}} = \mathbb{Q}(\omega^*).$$

► Für den späteren Gebrauch notiernen wir noch die folgende Bemerkung.

1.5.9 Bemerkung: i.) Es sei **h** eine Handelsstrategie und

[10] BF steht für Butterfly.

[11] Vgl. auch Hull [13, Seite 468] für diese Methode (in einem anderen Kontext). Die Werte $V_0^{\mathbf{h}_{\omega^*}^{\mathrm{BF}}}$ entsprechen den sogenannten Zustandspreisen, die wir ab **??** behandeln.

$\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$ Risikoneutralwahrscheinlichkeiten. Dann gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(\frac{V_1^{\mathbf{h}}}{R^f}\right)$$

und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(V_1^{\mathbf{h}}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(V_1^{\mathbf{h}}\right).$$

ii.) Wenn $\mathbf{X}$ replizierbar ist und $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$ Risikoneutralwahrscheinlichkeiten.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(\frac{\mathbf{X}}{R^f}\right)$$

und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\mathbf{X}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}\left(\mathbf{X}\right).$$

1.6 Vollständige Finanzmärkte und Eindeutigkeit des Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß

1.6.1 Definiton: Das EPFMM heißt **vollständig**, wenn es für jede bedingte Auszahlung $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ eine replizierende Strategie $\mathbf{h}$ gibt.

1.6.2 Bemerkung: Wir betrachten die Auszahlungsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R^f(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_1) & S_1^N(\omega_1) \\ R^f(\omega_2) & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_2) & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R^f(\omega_K) & S_1^1(\omega_K) & \dots & S_1^{N-1}(\omega_K) & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix}$$

und eine bedingte Auszahlung $\mathbf{X}$. Es gibt genau dann eine replizierende Handelsstrategie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{X}$$

eine Lösung $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ hat.

Vollständigkeit bedeutet also, dass das lineare Gleichungssystem für **jede rechte Seite** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^K$ lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ den Rang K hat (wenn die Matrix $\mathbf{A}$ K linear unabhängige Spalten hat), so dass die Spalten von $\mathbf{A}$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^K$ aufspannen. Mit noch anderen Worten: Die Spalten bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^K$.

Wir haben den folgenden Satz bewiesen:

1.6.3 Satz: Das EPFMM ist genau dann vollständig, wenn Rang $\mathbf{A} = K$ ist.

1.6.4 Zweiter Hauptsatz: In einem arbitargefreien EPFMM gilt Vollständigkeit genau dann, wenn es genau **ein** Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß gibt.

Mit anderen Worten: **In einem arbitargefreien** EPFMM ist die **Vollständigkeit** äquivalent zur **Eindeutigkeit** des Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaßes.

Vorsicht: Die Formulierung Vollständigkeit ist äquivalent zur Eindeutigkeit ist üblich aber ungenau! In einem vollständigen EPFMM kann es Arbitragemöglichkeiten geben. Dann gibt es (natürlich) kein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß.

1.6.5 Bemerkung: Wenn das EPFMM vollständig ist, dann hat $\mathbf{A} \in M(K, N+1; \mathbb{R})$ den Rang K. Offenbar hat dann auch $\mathbf{A}^* \in M(K, N+1; \mathbb{R})$ den Rang K. Der Rang von $(\mathbf{A}^*)^T \in M(N+1, K; \mathbb{R})$ und von $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ ist ebenfalls K (vgl. z.B. Garcia und Horn [6, S. 303] oder Meyer [32, S. 212]). Also ist $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ eine $K \times K$ Matrix mit Rang K; also ist $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ invertierbar. Wir erhalten damit eine geschlossene Formel für die Risikoneutralwahrscheinlichkeiten $\mathbf{q}$. In der Tat, aus der Bewertungsformel $(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q} = \bar{\mathbf{S}}_0$ folgt, dass $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q} = \mathbf{A}^*\bar{\mathbf{S}}_0$. Schließlich

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\right)^{-1} \mathbf{A}^* \, \bar{\mathbf{S}}_0.$$

Wir haben einen alternativen (auch kurzen Beweis) für die Implikation, Arbitragefrei und Vollständigkeit impliziert Eindeutigkeit, gefunden. In der Tat: Wenn $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ Vektoren mit Risikoneutralwahrscheinlichkeiten sind, dann gilt $(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{S}}_0, i = 1, 2$. Dann sind die beiden $\mathbf{q}_i$ auch Lösungen der linearen Gleichung $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T\mathbf{q}_i = \mathbf{A}^*\bar{\mathbf{S}}_0$. Die $K \times K$ Matrix $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^T$ hat den Rang K. Dann ist die Lösung des linearen Gleichungssystems eindeutig bestimt. Also $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$.

1.6.6 Bemerkung: Wenn das arbitragefreie EPFMM vollständig ist, dann gibt es für alle bedingten Auszahlungen nur einen Preis, der mit Arbitragefreiheit vereinbar ist und diesen Preis kann man mit den Formeln $p_X = V_0^{\mathbf{h}}$ oder $p_X = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X/B)$ berechnen. Also: Die Finanzpreise der das EPFMM definierenden Anlagemöglichkeiten (den **Basiswertpapieren**) legen die Preise beliebiger bedingter Auszahlungen (den **Derivaten**) eindeutig fest. Ermittelt werden **relative Bewertungen**; relativ zu den Basiswertpapieren.

Die Preise der Basiswerpapiere erfüllen untereinander Arbitragefreiheit. .....

1.7 Unvollständige Märkte und Arbitragegrenzen

Wenn das arbitragefreie EPFMM unvollständig ist, dann gibt es für nicht replizierbare Auszahlungen **viele** Preise, die mit Arbitragefreiheit vereinbar sind. Diese Aussage wird im folgenden substantiviert, wobei wir uns an Pliska [35] und Williams [48] orientieren. Wir werden die Grenzen ermitteln zwischen denen die Preise liegen, die mit Arbitragefreiheit vereinbar sind.

1.7.1 Definition: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und es gelte Arbitragefreiheit. Es sei $\mathbb{Q}$ ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß. Wir definieren die folgenden Operatoren[12] auf der Menge der bedingten Auszahlungen

Wir suchen die preiswerteste Superreplikation. .....

$$V^+(\mathbf{X}) = \inf\{\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}_1] \,|\, \mathbf{Y} \geq \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ replizierbar } \},$$
$$V^-(\mathbf{X}) = \sup\{\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}_1] \,|\, \mathbf{Y} \leq \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ replizierbar } \}.$$

Beachte, dass die Wahl von $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ irrelevant ist: da Y replizierbar ist, nimmt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}_1]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}$ den gleichen Wert an.

Ein erreichbares Auszahlungsprofil $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ heißt **Superreplikation** von $\mathbf{X}$. Da $\mathbf{Y}$ mindestens so gut wie $\mathbf{X}$ ist, sind plausible Preise von $\mathbf{X}$ kleiner oder gleich dem fairen Preis $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}/\mathbf{R}_1]$ von $\mathbf{Y}$. Das gilt für alle Superreplikationen von $\mathbf{X}$. Wir erhalten deshalb mit $V^+(\mathbf{X})$ die kleinste obere Schranke, da wir das Infimum bilden.

Ein erreichbares Auszahlungsprofil $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$ heißt **Subreplikation** von $\mathbf{X}$. Wir erhalten mit $V^-(\mathbf{X})$ die größte untere Schranke, da wir das Supremum bilden.

$V^+(\mathbf{X})$ und $V^-(\mathbf{X})$ heißen obere bzw. untere **Arbitragegrenze**.

1.7.2 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine bedingte Auszahlung und es gelte Arbitragefreiheit. Es gibt replizierbare $\mathbf{Y}^+, \mathbf{Y}^-$ mit $V^+(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^+/\mathbf{R}_1]$ bzw. $V^-(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^-/\mathbf{R}_1]$. Für nicht replizierbare $\mathbf{X}$ gilt zudem: $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}^+ \geq \mathbf{X}$ und $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}^- \leq \mathbf{X}$.

[12] Wir sprechen von Operatoren, da sie auf Abbildungen angewendet werden.

1.7.3 Bemerkung: Obwohl also $V^+(\mathbf{X}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{Y}^+/\mathbf{R}_1]$ gilt, kann $\mathbf{Y}^+ = \mathbf{X}$ nicht gelten; sonst wäre $\mathbf{X}$ replizierbar (mit $\mathbf{h}^*$). Also muss $\mathbf{Y}^+(\omega) > \mathbf{X}(\omega)$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$ gelten.

1.7.4 Satz: In einem arbitargefreien EPFMM gilt, dass $\mathbf{X}$ genau dann nicht replizierbar ist, wenn $V^+(\mathbf{X}) > V^-(\mathbf{X})$ ist.

1.7.5 Satz: Es sei $\mathbf{X}$ eine **nicht-replizierbare** bedingte Auszahlung. Es gibt genau dann eine Arbitrage, wenn die bedingte Auszahlung in $t = 0$ zu einem Preis $p \geq V^+(\mathbf{X})$ oder zu einem Preis $p \leq V^-(\mathbf{X})$ gehandelt wird. Für $p \in (V^-(\mathbf{X}), V^+(\mathbf{X}))$ bleibt die Arbitragefreiheit erhalten.

Literaturverzeichnis

[1] **Back, Kerry**; 2010; Asset Pricing and Portfolio Choice Theory; 2. Auflage; Oxford University Press; Oxford

[2] **Björk, Tomas**, 2009, Arbitrage Theory in Continuous Time, 3. Auflage, Oxford University Press, Oxford

[3] **Campolieti, Guiseppe und Roman Makarov**, 2014, Financial Mathematics, CRC Press – Taylor & Francis Group

[4] John **Cochrane**, 2005, Asset Pricing: Revised Edition; Princeton University Press

[5] **Cox, John C. und Stephen Ross, Mark Rubinstein**, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, Vol. 7, S. 229?263.

[6] **Garcia, Stephan Ramon und Roger Horn**, 2017, Linear Algebra, Campbridge University Press

[7] **de la Grandville, Olivier**, 2001, Bond Pricing and Portfolio Analytics, MIT Press, Campbridge (Mass.)

[8] **Diebold, Francis und Glenn Rudebusch**, 2013, Yield Curve Modeling and Forecasting, Princeton University Press

[9] Darrell **Duffie**, 2001, Dynamic Asset Pricing, Princeton University Press.

[10] Hans **Föllmer** und Alexander **Schied**, 2016, Stochastic Finance – An introduction in discrete time, 4. Auflage, Gruyter

[11] Michael **Günther** und Ansgar **Jüngel**, 2010, Finanzmathematik mit Matlab, 2. Auflage, Springer-Vieweg

[12] Bruce **Hansen**, 2022, Econometrics, Princeton University Press

[13] John **Hull**, Options, Futures and other Derivatives; 11. Auflage; Pearson;

[14] John **Hull**, Optionen, Futures and andere Derivate; 11. Auflage; Pearson;

[15] **Harrison, J.M. und Stanley Pliska**, 1981, Martingales and Stochastic Intergrals in the Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes an Applications, Vol. 11, S. 215-260.

[16] **Harrison, J.M. und David Kreps**, 1979, Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, Vol. 20, S. 381-408.

[17] **Hente, Norbert**, 2019, Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie, Springer Spektrum

[18] Kenneth **Hoffmann** und Ray **Kunze**, ..., Linear Algebra, ...

[19] **Kleiber, Christian und Achim Zeileis**, 2008, Applied Econometrics with R, Springer Verlag, Berlin

[20] Achim **Klenke**, 2013, Wahrscheinlichkeitstheorie, 3. Auflage, Springer Spektrum, Berlin

[21] **Krengel, Ulrich**, 2005, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 8. Auflage, Springer

[22] David **Kreps**, 2013, Microeconomic Foundations I, Princeton University Press

[23] Manfred **Jäger-Ambrozewicz**, 2025, Wahrscheinlichkeitstheorie, `https://www.mathstat.de/lehre.html`

[24] Robert **Jarrow**, 2002, Modelling Fixed-Income Securities and Interest Rate Options, Stanford University Press, Stanford

[25] **Jarrow, Robert, Stuart McLean Turnbull**, 2000, Derivative Securities, South-Western College Pub, ...

[26] Robert **Jarrow**, 2002, Derivative Securities, Financial Markets and Risk Management, W. W. Norton, New York

[27] Dieter **Jungnickel**, 2015, Optimierungsmethoden, 3. Auflage, Springer

[28] Uwe **Küchler**, 2016, Maßtheorie für Statistiker, 8. Auflage, Springer

[29] Damien **Lamberton** und Bernard **Lapeyre**, 2008, Introduction to Stochastic Calculus, 2. Edition, Chapman & Hall / CRC

[30] **Markowitz, Harry**, 1952, Portfolio selection, The Journal of Finance, Vol. 7 (1), S. 77-91.

[31] **Markowitz, Harry**, 1959, Portfolio selection, John Wiley, New York.

[32] **Meyer, Carl D.**, 2000, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[33] **McNeil, Alexander, Rüdiger Frey, Paul Embrechts**, 2015, Quantitative Risk Management, 2. Auflage, Princeton University Press, Princeton

[34] Marek **Musiela**, Marek **Rutkowski**, 2005, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer

[35] Stanley **Pliska**, 1997, Introduction to Mathematical Finance, Blackwell Publishing, Oxford

[36] **Roll, Richard**, 1977, A critique of the asset pricing

theoty's tests, Journal of Financial Economics, Vol. 4, S.129-176.

[37] **Röman, Jan**, 2017, Analytical Finance Vol. 1, Palgrave Macmillan – Springer Nature

[38] **Seydel, Rüdiger**, 2009, Tools for Computational Finance, Springer, Heidelberg

[39] Rüdiger **Seydel**, 2017, Einführung in die numerische Berechnung von Finanzderivaten, 2. Auflage, Springer, Heidelberg

[40] **Seydel, Rüdiger**, 2012, Lattice Approach and Implied Trees, in: Jin-Chuan Duan, Wolfgang Härdle, James Gentle, Handbook of Computational Finance, S. 551ff, Springer Verlag, Berlin

[41] **Shreve, Steven**, 2004, Stochastic Calculus for Finance 1, Springer, Heidelberg

[42] **Shreve, Steven**, 2004, Stochastic Calculus for Finance 2, Springer, Heidelberg

[43] **Skiadas, Costis**, 2009, Asset Pricing Theory, Princeton Univerity Press

[44] **Steele, Michael**, 2010, Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer, Berlin.

[45] **Tappe, Stefan**, 2013, Einführung in die Wahrschein-

lichkeitstheorie, Springer Spektrum

[46] **Tolver, Anders**, 2016, An introduction to Markov chains, `http://www.math.ku.dk/noter/filer/stoknoter.pdf`

[47] **Veronesi, Pietro**, 2010, Fixed Income Securities, Wiley

[48] **Williams, Ruth**, 2006, Introduction to the Mathematics of Finance, American Mathematical Society

[49] **Zivot, Eric**, 2013, Portfolio Theory with Matrix Algebra, mineo