

Formelsammlung Stochastik (WT, Statistik, Stochastische Prozesse)

Manfred Jäger-Ambrozewicz, www.mathfred.de

Stand: 11. Juli 2026

Ziehungen

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
Reihenfolge relevant	n^k	$(n)_k$
Reihenfolge irrelevant	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$

Belegungen (Behälter unterscheidbar)

	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbeleg.
unterscheidbare Kugeln	n^k	$(n)_k$
nicht-unterscheidbare Kugeln	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$

Einige diskrete Verteilungen:

Symbol	...-Verteilung	Zähldichte $p(k) = \mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
$U(n)$	Gleich	$p(k) = \frac{1}{n}, k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\text{Bin}(n, p)$	Binomial	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \dots, n$	np	$np(1-p)$
$\text{NB}(r, p)$	neg. Binomial	$p(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
$\text{Poi}(\lambda)$	Poisson	$p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
$\text{Geo}(p)$	Geometrisch	$p(k) = p(1-p)^k, k \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\text{HGeo}(p_1, \dots, p_K)$	Hypergeometrisch	$p(l) = \frac{\binom{M}{l} \binom{N-M}{k-l}}{\binom{N}{k}}$	$\frac{kM}{N}$	$\frac{N-k}{N-1} \frac{kM}{N} \left(1 - \frac{kM}{kN}\right)$
$\text{Multi}(p_1, \dots, p_K)$	Multinomial	$p((n_1, \dots, n_K)) = \binom{n}{n_1, \dots, n_K} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_K^{n_K}$		

Einige absolutstetige Verteilungen:

Symbol	...-Verteilung	Dichte $f(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
$U(a, b)$	Gleich	$\frac{1}{b-a}, a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	Gamma	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
$\text{Exp}(\lambda)$	Exponential	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\chi_n^2 := \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$	Chi Quadrat	$\frac{x^{(n-2)/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot e^{-x/2}, x > 0$	n	$2n$
$t(\nu, \mu, \sigma^2)$	(Student) t	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	μ	$\frac{\nu}{\nu-2}\sigma^2$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2
$\text{LN}(\mu, \sigma^2)$	Log-Normal	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), x > 0$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$
$\text{Par}(\alpha, d)$	Pareto	$\frac{\alpha d^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x \geq d > 0$	$\frac{\alpha d}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha d^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

n Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad (1)$$

Multinomialkoeffizient

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (2)$$

fallende Faktorielle

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (3)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \quad (4)$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (5)$$

Multimengenkoeffizient

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} := \binom{n+k-1}{k} \quad (6)$$

σ -Algebra $\Omega \neq \emptyset$

$$\Omega \in \mathcal{F} \quad (7)$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \quad (8)$$

$$A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \quad (9)$$

Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad (10)$$

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \quad (11)$$

Regel für $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad (12)$$

$$\mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad (13)$$

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad (14)$$

$$A \subset B, \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \quad (15)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (16)$$

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \quad (17)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit ($\exists \mathbb{P}(B) \neq 0$)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (18)$$

Unabhängigkeit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (19)$$

Für eine Familie von Ereignissen A_j . Für alle endlichen $J \subset I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \quad (20)$$

Multiplikationsformel

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot \\ & \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \\ & \dots \\ & \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \\ & \cdot \mathbb{P}(A_1) \end{aligned} \quad (21)$$

Fallunterscheidungsformel (n Fälle), Cocktailformel

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \\ & \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) \end{aligned} \quad (22)$$

Fallunterscheidungsformel (2 Fälle), Cocktailformel

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c). \quad (23)$$

Bayes (n Fälle)

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)} \quad (24)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} \quad (25)$$

Bayes (A und A^c)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \quad (26)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \quad (27)$$

Mehrstufige Experimente

$$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \quad (28)$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_2(\omega_2|\omega_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}_n(\omega_n|\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \quad (29)$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega). \quad (30)$$

Prinzip von Inklusion und Exklusion

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i\right) &= \sum \mathbb{P}(A_i) \\ & - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ & + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad (31)$$

Limsup A_i

$$\begin{aligned} \limsup A_i &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega | \text{für } \infty\text{-viele } i \text{ gilt } \omega \in A_i\} \\ &= \text{„}\infty\text{-viele der Ergeb. } A_i \text{ treten ein“} \end{aligned}$$

Liminf A_i

$$\begin{aligned} \liminf A_i &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega | \text{für alle bis auf endl. viele } i : \omega \in A_i\} \\ &= \text{„alle bis auf endl. viele der Ergeb. } A_i \\ & \text{treten ein“} \end{aligned}$$

Borel-Cantelli

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}\{A_i \text{ unendl. oft}\} = 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty \wedge A_i \text{ paarweise unabh.} \\ \Rightarrow \mathbb{P}\{A_i \text{ unendl. oft}\} = 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Zähldichte $p_j \geq 0, j \in \Omega$ (abzählbar viele)

$$\sum_{j \in \Omega} p_j = 1 \quad (34)$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j \in B} p_j \quad (35)$$

Laplace

$$\Omega \neq \emptyset, \#(\Omega) = n, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\#(A)}{n} \quad (36)$$

$$= \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \quad (37)$$

Bernoulli

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad (38)$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \quad (39)$$

$$\mathbb{E}(X) = p \quad (40)$$

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p) \quad (41)$$

Binomial

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (42)$$

$$\mathbb{E}(X) = np \quad (43)$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1 - p) \quad (44)$$

Multinomial

$$\Omega = \{(n_1, n_2, \dots, n_K) \in \mathbb{N}_0^K \mid \sum_{j=1}^K n_j = n\}, p_i \in (0, 1), i = 1, \dots, K, \sum_{i=1}^K p_i = 1$$

$$p((n_1, \dots, n_K)) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_K} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_K^{n_K} \quad (45)$$

Hypergeometrische Verteilung

$$N, M, n \in \mathbb{N} \text{ mit } M \leq N, n \leq N,$$

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$p_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (46)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{Mn}{N} \quad (47)$$

Geometrische Verteilung

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

$$p_k = (1 - p)^k p \quad (48)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - p}{p} \quad (49)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2} \quad (50)$$

Negative Binomial Verteilung / Pascal Verteilung

$$p_k = \binom{n+k-1}{k} (1 - p)^k p^n \quad (51)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(1 - p)}{p} \quad (52)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n(1 - p)}{p^2} \quad (53)$$

Poisson Verteilung

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (54)$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad (55)$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda \quad (56)$$

Diskrete Zufallsvariable

i.) $\text{Bild}(X)$ ist abzählbar.

ii.) $A \subset \text{Bild}(X), X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

iii.) **Verteilung** von X

$$\mathbb{P}^X : \begin{cases} \mathcal{P}(\text{Bild}(X)) \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

iv.) $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ die Wahrscheinlichkeit das X einen Wert in der Menge A annimmt.

Erwartungswert (diskret)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Bild}(X)} p(x) \cdot x \quad (57)$$

Varianz

$$\mathbb{V}(X) := \sigma_X^2 := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (58)$$

Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \quad (59)$$

Verschiebungssatz

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad (60)$$

Dichte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \geq 0 \quad (61)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (62)$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(z) dz, x \in \mathbb{R} \quad (63)$$

Regeln für Wahrscheinlichkeiten mit Dichten
 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$$\mathbb{P}(\{a\}) = 0 \quad (64)$$

$$\mathbb{P}((-\infty, a]) = \mathbb{P}((-\infty, a)) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (65)$$

$$\mathbb{P}((a, \infty)) = \mathbb{P}([a, \infty)) = \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (66)$$

$$\mathbb{P}((a, b)) = \mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}([a, b)) \quad (67)$$

$$= \mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(x) dx \quad (68)$$

Verteilung von X

$$\mathbb{P}^X = \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1] \\ B \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(B)) =: \mathbb{P}(X \in B) \end{cases} \quad (69)$$

Verteilungsfunktion

$$F = \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases} \quad (70)$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) \quad (71)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq x) \quad (72)$$

$$= \mathbb{P}^X((-\infty, x]) \quad (73)$$

Erwartungswert (mit Dichte) $X \sim f$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (74)$$

Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (75)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad (76)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (77)$$

Gauß-Verteilung / Normalverteilung

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ und

$$\phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (78)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad (79)$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2 \quad (80)$$

Log-Normalverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \phi_{\mu, \sigma}(\ln(x)) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (81)$$

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (82)$$

$$\mathbb{V}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (83)$$

$$\log(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (84)$$

Exponentialverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (85)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (86)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (87)$$

Gamma-Verteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (88)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (4 Fälle)

i.) X, Y haben Dichten

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy \quad (89)$$

ii.) Y hat eine Dichte, X diskret

$$\mathbb{P}(X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = x|Y = y) f_Y(y) dy \quad (90)$$

iii.) X hat eine Dichte, Y diskret

$$f_X(x) = \sum_y f_{X|Y}(x|y) \mathbb{P}(Y = y) \quad (91)$$

iv.) X diskret, Y diskret

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x|Y = y) \mathbb{P}(Y = y) \quad (92)$$

Bayes (4 Fälle)

i.) X, Y haben Dichten

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)}{f_X(x)} \quad (93)$$

ii.) Y hat eine Dichte, X diskret

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x|Y = y) f_Y(y)}{\mathbb{P}(X = x)} \quad (94)$$

iii.) X hat eine Dichte, Y diskret

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_X(x|Y = y) \mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \quad (95)$$

iv.) X diskret, Y diskret

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x|Y = y) \mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \quad (96)$$

λ -Quantil von X

$$F(q) = \mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda \text{ und} \quad (97)$$

$$G(q) = F(q-) = \mathbb{P}(X < q) \leq \lambda. \quad (98)$$

obere Quantilsfunktion

$$q^+(\lambda) = \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) > \lambda\} \quad (99)$$

$$= \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) \leq \lambda\} \quad (100)$$

untere Quantilsfunktion

$$q^-(\lambda) = \sup\{q \in \mathbb{R} : F(q) < \lambda\} \quad (101)$$

$$= \inf\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\} \quad (102)$$

$$= \min\{q \in \mathbb{R} : F(q) \geq \lambda\} \quad (103)$$

Verallgemeinerte Inverse

$$\text{VaR}_\lambda(F) = F^{\leftarrow}(\lambda) = q_F^-(\lambda) \quad (104)$$

Verallgemeinerte Inverse

$$F(x) \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq F^{\leftarrow}(\lambda). \quad (105)$$

Quantiltransformation

$$F^{\leftarrow}(U) \sim F \quad (106)$$

Wahrscheinlichkeitstransformation ($X \sim F$, $\exists F$ stetig)

$$F(X) \sim \text{Unif}([0, 1]) \quad (107)$$

$$\mathbb{P}(F(X) \leq u) = u \quad (108)$$

Verallgemeinerte Inverse, Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \int X dF = \int_0^1 F^{\leftarrow}(u) du. \quad (109)$$

Einfache Funktionen

$$X(\omega) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega) \quad (110)$$

Einfache Funktionen – Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{P}(A_i) \quad (111)$$

Erwartungswert – nicht-negative Funktionen

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) \mid 0 \leq Y \leq X, Y \text{ einf.}\} \quad (112)$$

Erwartungswert

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad (113)$$

$$= \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \quad (114)$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_E h(X) d\mathbb{P}^X \quad (115)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) dF^X \quad (116)$$

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}^X \quad (117)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}}(x) d\mathbb{P}^X(x) \quad (118)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}^X = \int_{\mathbb{R}} x dF^X. \quad (119)$$

Erwartungswert linear

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \quad (120)$$

Erwartungswert monoton

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) \quad (121)$$

Dreiecksungleichungen

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|) \quad (122)$$

Varianz

$$\sigma_X^2 := \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (123)$$

Varianz – Verschiebungssatz

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad (124)$$

Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \quad (125)$$

Varianz

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \quad (126)$$

Varianz (wenn unkorreliert)

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \quad (127)$$

Ungleichungen (Tschebyscheff, Markov)

$$\mathbb{P}(h(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{a} \quad (128)$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} \quad (129)$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2} \quad (130)$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2} \quad (131)$$

Gemeinsame Verteilung

$$\mathbb{P}^{(X,Y)}(B) = \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, 1] \\ B \mapsto \mathbb{P}((X, Y) \in B) \end{cases} \quad (132)$$

Gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F^{(X,Y)} = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ (x, y) \mapsto \mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) \\ = \mathbb{P}^{(X,Y)}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \end{cases} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x \wedge Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}^{(X, Y)}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \end{aligned}$$

Gemeinsame Dichte und Randdichte

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \quad (134)$$

$$F(\infty, \infty) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (135)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (136)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (137)$$

Kovarianz

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \quad (138)$$

$$= \mathbb{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \quad (139)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad (140)$$

Korrelation

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{std}(X) \cdot \text{std}(Y)} \quad (141)$$

Kovarianz

$$\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \text{cov}(X, Y) \quad (142)$$

Kovarianz

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \quad (143)$$

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\text{cov}(X, Y) \quad (144)$$

Varianz-Kovarianz Matrix

$$(\Sigma_{\mathbf{X}})_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j) \quad (145)$$

$$\sigma_X^2 = (\Sigma_{\mathbf{X}})_{i,i} \quad (146)$$

Sandwichformel Kovarianz für lineare Transformation Kovarianz

$$\Sigma_{\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{b}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T. \quad (147)$$

Ungleichungen Momente (Cauchy-Bunjakowski-Schwarz)

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \quad (148)$$

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} \quad (149)$$

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} \quad (150)$$

$$(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \quad (151)$$

Ungleichung von Jensen (g konkav)

$$\mathbb{E}(g(X)) \leq g(\mathbb{E}(X)) \quad (152)$$

Regression

$$b = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\mathbb{V}(X)} \quad (153)$$

Konvergenz

i.) $(X_i) \rightarrow X$ **fast sicher** $:\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_i \rightarrow X) = 1$. In diesem Fall schreiben wir

$$\text{f.s.-lim } X_i = X. \quad (154)$$

ii.) Es sei $p = 1$ oder $p = 2$. $(X_i) \rightarrow X$ **im p-ten Mittel** $:\Leftrightarrow X_i \in \mathcal{L}^p, i \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}(|X_i - X|^p) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. In diesem Fall schreibt man

$$\mathcal{L}^p\text{-lim } X_i = X. \quad (155)$$

iii.) $(X_i) \rightarrow X$ **nach Wahrscheinlichkeit** $:\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: für $i \rightarrow \infty$ gilt $\mathbb{P}(|X_i - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$. In diesem Fall schreibt man

$$\text{n.W.-lim } X_i = X. \quad (156)$$

iv.) $(X_i) \rightarrow X$ **in Verteilung** $:\Leftrightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ in denen F^X stetig ist gilt $F^{X_i}(x) \rightarrow F^X(x)$. In diesem Fall schreiben wir

$$\text{i.V.-lim } X_i = X. \quad (157)$$

ε -Abweichungsmengen A_n und B_n

$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\} \quad (158)$$

$$B_n(\varepsilon) = \left\{ \bigcup_{m \geq n} A_m(\varepsilon) \right\} \quad (159)$$

f.s.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (160)$$

f.s.-Konvergenz $\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty \quad (161)$$

f.s.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} |X_m - X| > \varepsilon) = 0 \quad (162)$$

n.W.-Konvergenz $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad (163)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (164)$$

Empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i(\omega)) \quad (165)$$

Gliwenko-Cantelli

$$\text{f.s.-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x, \omega) - F(x)| = 0 \quad (166)$$

GgZ

schwaches

$$\text{n.W.-} \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \quad (167)$$

starkes

$$\text{f.s.-} \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \quad (168)$$

ZgS

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad (169)$$

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\text{std}(S_n)} \quad (170)$$

$$\text{i.V.-} \lim S_n^* = Z, Z \sim N(0, 1), \quad (171)$$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \quad (172)$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n - k\sigma/\sqrt{n} \geq \mu \geq \bar{X}_n + k\sigma/\sqrt{n}) \quad (173)$$

$$\sim 2\Phi(k) - 1 \quad (174)$$

Halbring

$$\emptyset \in \mathcal{H} \quad (175)$$

$$A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{H} \quad (176)$$

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{H} &\Rightarrow A \setminus B = \dots \\ &= C_1 \cup \dots \cup C_m, C_k \in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (177)$$

μ **Inhalt** auf HR $\mathcal{H}$: für alle $A_i \in \mathcal{H}, i = 1, \dots, n$ mit

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \quad (178)$$

gilt:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad (179)$$

$\mathcal{Z} = \{Z_j | j \in K\}$ eine **Zerlegung**

$$\sigma(\mathcal{Z}) = \left\{ \bigcup_{k \in J, J \subset K} Z_k \mid J \subset K \right\}.$$

$f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ **messbar**

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad (180)$$

f mit **endlichen Bild** $f(\Omega) = \{c_1, \dots, c_n\}$

$$Z_i = f^{-1}(\{c_i\}) \quad (181)$$

$$\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\} \quad (182)$$

$$\sigma(f) = \sigma(\mathcal{Z}) \quad (183)$$

f ist genau dann $\sigma(\mathcal{Z})$ -messbar, wenn f auf den Mengen Z_k konstant ist

Bedingte Erwartungen gegeben B , $\exists \mathbb{P}(B) \neq 0$

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (184)$$

Bedingte Erwartungen gegeben B
 Y diskret

$$\mathbb{E}(Y|B) = \sum_y y \mathbb{P}(y|B) \quad (185)$$

Y mit Dichte

$$\mathbb{E}(Y|B) = \int y f(y|B) dy \quad (186)$$

$$f(y|B) = \frac{\mathbb{P}(B|Y=y)f(y)}{\mathbb{P}(B)} \quad (187)$$

Bedingte Erwartungen – Fallunterscheidungsformel

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y|B_i) \mathbb{P}(B_i) \quad (188)$$

Varianzzerlegung

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X)) \quad (189)$$

Bedingte Erwartung bezügl. $\mathcal{F}$

$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}$ -messbar und

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_F Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F X) \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (190)$$

Bedingte Erwartung bezügl. $\mathcal{F}$

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y | \mathcal{F}) = \alpha \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) + \beta \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) \quad (191)$$

$$X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}) \quad (192)$$

Bedingte Erwartung mit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z})$ ($\mathcal{Z}$ Zerlegung)

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z_i} X)}{\mathbb{P}(Z_i)} \text{ für } \omega \in Z_i \quad (193)$$

und wenn zudem X diskret

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F})(\omega) = \sum_{x \in \text{Bild}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x | Z_i), \omega \in Z_i \quad (194)$$

Bedingte Erwartung gegeben $\mathcal{F}$ als Projektion

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \arg \min_Z \{ \mathbb{E}(X - Z)^2 | Z \in \mathcal{L}^2, Z \text{ } \mathcal{F}\text{-messbar} \} \quad (195)$$

Gesetz der iterierter Erwartung

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_2) | \mathcal{F}_1] \quad (196)$$

Bedingte Erwartungen (Y $\mathcal{F}$ -messbar)

$$\mathbb{E}(Y X | \mathcal{F}) = Y \mathbb{E}(X | \mathcal{F}) \quad (197)$$

Bedingte Erwartung gegeben $\sigma(X)$ und $\mathcal{F}$ unabhängig

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X) \quad (198)$$

Bedingte Erwartung gegeben $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ vollständige Information

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = X \quad (199)$$

Bedingte Erwartung gegeben Ohne Information

$$\mathbb{E}(X | \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X) \quad (200)$$

Bedingte Erwartung gegeben Info aus ZV Y

$$\mathbb{E}(X | Y)(\omega) := \mathbb{E}(X | \sigma(Y))(\omega) \quad (201)$$

$$\mathbb{E}(X | Y)(\omega) = h(Y(\omega)) \quad (202)$$

$$\mathbb{E}(X | Y = x) = h(x) \quad (203)$$

$$\mathbb{E}(X | Y = Y(\omega)) = \mathbb{E}(X | Y)(\omega) \quad (204)$$

Bedingter Erwartungswert gegeben Y

$$\mathbb{E}(X | Y = y_i) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_i) \quad (205)$$

$$= \sum x_i \frac{\mathbb{P}(X = x_i \wedge Y = y_i)}{\mathbb{P}(Y = y_i)} \quad (206)$$

Bedingter Erwartungswert bei Dichten

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ falls } f_Y(y) \neq 0 \quad (207)$$

$$= 0 \text{ sonst}$$

$$\mathbb{E}(h(X) | Y = y) = \int h(x) f_{X|Y}(x|Y=y) dx \quad (208)$$

$$\mathbb{E}(X | Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|Y=y) dx \quad (209)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit bezügl.

$\mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A | \mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}$ messbar und

$$\int_F \mathbb{P}(A | \mathcal{F}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap F) \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (210)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_F \mathbb{P}(A | \mathcal{F})) = \mathbb{P}(A \cap F) \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (211)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei Zerlegung $\mathcal{Z}$

$$\mathbb{P}(A | \mathcal{F})(\omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap Z_i)}{\mathbb{P}(Z_i)}, \omega \in Z_i \quad (212)$$

Bedingte Zähldichte für $\mathcal{F} = \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega\} | \mathcal{F})(\tilde{\omega}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{\omega\} | B), \omega, \tilde{\omega} \in B \\ \mathbb{P}(\{\omega\} | B^c), \omega, \tilde{\omega} \in B^c \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad (213)$$

Bedingte Zähldichte für $\mathcal{F} = \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$

$$\mathbb{P}(\{\omega\} | \mathcal{F})(\tilde{\omega}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{\omega\} | B), & \tilde{\omega} \in B \\ \mathbb{P}(\{\omega\} | B^c), & \tilde{\omega} \in B^c \end{cases} \quad (214)$$

Bedingte Erwartungen und bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{E}(X | \sigma(\{B\}))(\tilde{\omega}) = \int X(\omega) \mathbb{P}(d\omega | \sigma(\{B\}))(\tilde{\omega})$$

Charakteristische Funktion

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}^X(x) \quad (215)$$

$$\Psi_{-X}(t) = \overline{\Psi_X(t)} \quad (216)$$

$$\Psi_{a+bX}(t) = e^{iat} \Psi_X(bt) \quad (217)$$

Verteilung von Summen von unabh. ZV

$$\Psi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{j=1}^n \Psi_{X_j}(t) \quad (218)$$

Inversion

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \Psi_X(t) dt = \frac{1}{2} \mathbb{P}^X(\{a\}) + \mathbb{P}((a, b)) + \frac{1}{2} \mathbb{P}^X(\{b\}) \quad (219)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Psi_X(t) dt \quad (220)$$

Transformation $Y = g(X)$, $m = 1$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) |h'(y)| \quad (221)$$

Transformation $Y = g(X)$, $m = 2$, $I = I_1 \cup I_2$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{g(I_1)}(y) f_X(h_1(y)) |h'_1(y)| \quad (222)$$

$$+ \mathbb{1}_{g(I_2)}(y) f_X(h_2(y)) |h'_2(y)| \quad (223)$$

Transformation $Y = aX + b$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (224)$$

Statistik

p-Quantil x_p

- mindestens der Anteil p der Daten ist kleiner oder gleich x_p **und** mindestens der Anteil $1-p$ ist größer oder gleich x_p .

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \quad (225)$$

Varianz (in Daten)

- Empirische Varianz

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) \quad (226)$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \quad (227)$$

- (empirische) Standardabweichung

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)} \quad (228)$$

- Stichprobenvarianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) \quad (229)$$

- Stichprobenstandardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)} \quad (230)$$

- Umrechnung

$$\tilde{s}^2 \frac{n}{n-1} = s^2$$

$$\tilde{s} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = s$$

Statistisches Modell

- **Stichprobenraum** $\mathcal{X} \neq \emptyset$. In dieser Menge liegen die denkbaren Ergebnisse der Datenerhebung/Stichprobe.
- σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{X}$; damit wir auch Ereignisse analysieren können; insb. Intervalle.
- **Parameterraum** $\Theta \neq \emptyset$; typischerweise $\Theta \subset \mathbb{R}^l$ (es gibt l Parameter).
- Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta$, wobei die **Parametrisierung** $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta$ injektiv ist.

Schätzer

- Ein Schätzer (Punktschätzer) für einen Parametervektor $\theta \in \mathbb{R}^l$ ist eine messbare Abbildung $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^l$.
- Ist $x \in \mathcal{X}$ eine konkrete Stichprobe, dann heißt $\hat{\theta} = T(x)$ Schätzwert für θ zur Beobachtung x .

Eigenschaften Schätzer

i.) $\text{MQA}_T(\theta) = \mathbb{E}_\theta(T - \theta)^2$ heißt **mittlere quadratische Abweichung** von T (an der Stelle θ).

ii.) T heißt **erwartungstreu**, falls für alle $\theta \in \Theta$

$$\mathbb{E}_\theta(T) = \theta \quad (231)$$

iii.) $b_T(\theta) = \mathbb{E}_\theta(T) - \theta$ heißt **Verzerrung** von T .

Eigenschaft Schätzer

$$\text{MQA}_T(\theta) = \mathbb{V}_\theta(T) + b_T(\theta)^2 \quad (232)$$

Maximum Likelihood

$$\hat{\theta}(x) = \operatorname{argmax}_\theta f_\theta(x), x \in \mathcal{X} \quad (233)$$

Testproblem

$$\Theta = \Theta_0 \uplus \Theta_1 \quad (234)$$

Statistischer Test: Regel, die für jedes $x \in \mathcal{X}$ angibt, ob man sich für

$$\text{Hypothese } H_0: \theta \in \Theta_0 \text{ oder} \quad (235)$$

$$\text{Hypothese } H_1: \theta \in \Theta_1 \quad (236)$$

entscheidet

- für alle Stichproben $x \in \mathcal{K}$ wird die **Nullhypothese abgelehnt**
- $\mathcal{K}$ heißt **kritischer Bereich (Ablehnungsbereich)**.
- Fällt die Stichprobe hingegen x nicht in $\mathcal{K}$ – ist also $x \notin \mathcal{K}$ –, dann entscheidet man sich nicht gegen die Nullhypothese.

Fehler erster bzw. zweiter Art

- Gilt $\theta \in \Theta_0$, ist aber $x \in \mathcal{K}$, dann liegt eine **Fehler erster Art** vor. Man begeht also einen Fehler erster Art, wenn H_0 **fälschlicherweise ablehnt**.
- Gilt $\theta \in \Theta_1$, aber $x \notin \mathcal{K}$, dann liegt eine **Fehler zweiter Art** vor. Man begeht also einen Fehler zweiter Art, wenn man fälschlicherweise H_0 **nicht verwirft**.

Testfunktion

- Kritischer Bereich durch eine Testfunktion $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{K} = \{T \geq c\} = \{x \in \mathcal{X} \mid T(x) \geq c\} \quad (237)$$

- c heißt **kritischer Wert**.

Gütefunktion:

$$g_{\mathcal{K}}(\theta) = \mathbb{P}_{\theta}(X \in \mathcal{K}) \quad (238)$$

Test zum Niveau α

$$g_{\mathcal{K}}(\theta) \leq \alpha \text{ für alle } \theta \in \Theta_0 \quad (239)$$

p -Wert

- p -Wert wird für gegebene Beobachtung x so ermittelt: Man berechnet $T(x)$ und löst die Gleichung

$$p = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\theta}(T > T(x)) \quad (240)$$

Falls $\Theta_0 = \{\theta_0\}$

$$p = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > T(x)) \quad (241)$$

Wirkungstabelle/Konfusionstabelle

	in Wirklichkeit ist	
Entscheid.	$\theta \in H_0$	$\theta \in H_1$
für H_0	richtige Entscheid.	Fehler zweiter Art
für H_1	Fehler erster Art	richtige Entscheid.

Risikomanagement

Multivariate Normal

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv definit

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Z}, \quad (242)$$

- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ und $Z_i \sim \text{iiN}(0, 1)$
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine reelle Matrix mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$

In diesem Fall schreiben wir $\mathbf{X} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Gemeinsame Dichte – Multivariate Normal

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (243)$$

$(X_1, \dots, X_d)^T \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ und $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^d a_i X_i \sim N \left(\sum_{i=1}^d a_i \mu_i, \sum_{i,j=1}^d a_i a_j \Sigma_{ij} \right). \quad (244)$$

Multivariate Normal, $d=2$

$\text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y)\sigma_X\sigma_Y, (X_1, X_2)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (245)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (246)$$

Multivariate t

$\mathbf{X} \sim t_d(\nu, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv, $\nu > 0$

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} \quad (247)$$

wobei

- $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ ein Zufallsvektor mit $Z_1, \dots, Z_d \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ und
- $\mathbf{A}$ eine reelle $d \times d$ -Matrix mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ sowie
- W eine von den Z_i unabhängige Zufallsvariable mit $\nu/W \sim \chi_{\nu}^2$ ist.

Gemeinsame Dichte

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\nu\pi)^d \det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-(\nu+d)/2} \quad (248)$$

Bedingte Erwartungen

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} \quad (249)$$

Bedingte Erwartungen

$$\mathbb{E}(X|A) = \int x f(x|A) dx \quad (250)$$

$$f(x|A) = \frac{\mathbb{P}(A|X=x)f(x)}{\mathbb{P}(A)} \quad (251)$$

Value at Risk

$$\text{VaR}_\alpha(L) = F_L^{\leftarrow}(\alpha) \quad (252)$$

Value at Risk, Normal $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
 $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma z_\alpha \quad (253)$$

Value at Risk, log-Normal $L \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$

$$\text{VaR}_\alpha(L) = e^{\mu + \sigma z_\alpha} \quad (254)$$

Value at Risk, t $L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$

$$t_{\nu, \alpha} = q_{t(\nu, 0, 1)}(\alpha) = q_{t_\nu}(\alpha)$$

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma t_{\nu, \alpha} \quad (255)$$

Value at Risk

$$R = -\frac{V-V_0}{V_0}, R^{sz} = \frac{R-\mu}{\sigma}, X = V_0 - V$$

$$\text{V@R}_\lambda(X) = (\mu + \sigma \cdot F_{R^{sz}}^{-1}(\lambda))V_0. \quad (256)$$

ES und TVaR

$L \sim F$

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F^{\leftarrow}(u) du \quad (257)$$

$$\text{TVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) \quad (258)$$

$$\text{ES} = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E} \left[[L - F^{\leftarrow}(\alpha)]^+ \right] + F^{\leftarrow}(\alpha) \quad (259)$$

$$\text{ES} = \frac{1}{1-\alpha} [\mathbb{E} [\mathbf{1}_{L > F^{\leftarrow}(\alpha)} \cdot L] \quad (260)$$

$$+ F^{\leftarrow}(\alpha)(1 - \alpha - \mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha)))] \quad (261)$$

$$= \gamma \cdot \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) + (1 - \gamma) \cdot F^{\leftarrow}(\alpha) \quad (262)$$

$$= \gamma \cdot \text{TVaR} + (1 - \gamma) \cdot \text{VaR}. \quad (263)$$

$$\gamma = \frac{\mathbb{P}(L > F^{\leftarrow}(\alpha))}{1 - \alpha} \quad (264)$$

$$= \frac{1 - \mathbb{P}(L \leq F^{\leftarrow}(\alpha))}{1 - \alpha} \quad (265)$$

$$= \frac{1 - F(F^{\leftarrow}(\alpha))}{1 - \alpha}. \quad (266)$$

F an der Stelle $F^{\leftarrow}(\alpha)$ stetig

$$\text{ES} = \mathbb{E}(L|L > F^{\leftarrow}(\alpha)) = \text{TVaR}. \quad (267)$$

Expected Shortfall

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mu + \frac{\sigma \cdot \varphi(z_\alpha)}{1 - \alpha}. \quad (268)$$

$X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{\exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}{1 - \alpha} \cdot \Phi(\sigma - z_\alpha). \quad (269)$$

$X \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$, $t_{\nu, \alpha} = q_{t(\nu, 0, 1)}(\alpha) = q_{t_\nu}(\alpha)$

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot \frac{g_\nu(t_{\nu, \alpha})}{1 - \alpha} \cdot \frac{\nu + t_{\nu, \alpha}^2}{\nu - 1} \quad (270)$$

Kohärenz

(i) Monotonie: Für $L_1 \leq L_2$ gilt $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.

(ii) Translationsinvarianz: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt $\rho(L + s) = \rho(L) + s$.

(iii) Subadditivität: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.

(iv) Positive Homogenität: Für $\lambda > 0$ gilt $\rho(\lambda L) = \lambda \cdot \rho(L)$.

Copula

$\mathfrak{z} \mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)^\top \sim C$, $U_i \sim \text{Unif}([0, 1])$

(i) $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ falls $u_i = 0$ für (mindestens) ein i .

(ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für $i = 1, \dots, d$ und $u_i \in [0, 1]$.

(iii) Für alle $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_i \leq b_i$

$$0 \leq \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1, i_1}, \dots, u_{d, i_d}) \leq 1$$

wobei $u_{j,1} = a_j$ und $u_{j,2} = b_j$ für $j = 1, \dots, d$.

Rechteckgleichung für $d = 2$

$$0 \leq C(b_1, b_2) + C(a_1, a_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) \leq 1$$

Copula

$\exists \mathbf{X} \sim F^{\mathbf{X}}$ und $X_i \sim F_i$.

$\exists \mathbf{U} \sim C =: C_{\mathbf{X}}, U_i \sim \text{Unif}([0, 1])$

$$F^{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_d) = C(F_1(t_1), \dots, F_d(t_d)) \quad (271)$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \quad (272)$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) \quad (273)$$

$$= C(u_1, \dots, u_d) \quad (274)$$

Copula

$\exists F_i$ stetig. $\exists! C$.

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \quad (275)$$

Copula, $d = 2$

$$F(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \quad (276)$$

$$= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (277)$$

$$= C(\mathbb{P}(X_1 \leq x_1), \mathbb{P}(X_2 \leq x_2)) \quad (278)$$

$$= C(u_1, u_2) \quad (279)$$

Copula, $d = 2$

$\exists F_i$ stetig. $\exists! C$.

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)) \quad (280)$$

Tail-Abhängigkeiten

$$\lambda_L(X, Y) := \lim_{u \rightarrow 0+} \mathbb{P}(X \leq F_X^{\leftarrow}(u) | Y \leq F_Y^{\leftarrow}(u)) \quad (281)$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0+} \frac{C(q, q)}{q} \quad (282)$$

Unabhängigkeitscopula

$$C^{\text{ind}}(u_1, \dots, u_d) := \Pi(u_1, \dots, u_d) := \prod_{i=1}^d u_i \cdot \dots \cdot u_d \quad (283)$$

Comonotonie-Copula

$$C^{\text{co}}(u_1, \dots, u_d) := \min\{u_1, \dots, u_d\} \quad (284)$$

Contramonotonie-Copula

$$C^{\text{contra}}(u_1, u_2) := \max\{0, u_1 + u_2 - 1\} \quad (285)$$

Implizite Copula - Gauß Copula

$$C_{\mathbf{P}}^{\text{Gauß}}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\mathbf{0}, \mathbf{P}}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)) \quad (286)$$

$$= \Phi_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)) \quad (287)$$

Implizite Copula - t-Copula

$$C_{\nu, \mathbf{P}}^t(u_1, \dots, u_d) = \mathbf{t}_{\nu, \mathbf{P}}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)) \quad (288)$$

Empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty, x]}(x_i) \quad (289)$$

Quantil schätzen – Geordnete Stichprobe

`quantile(x, probs = 0.9, type = 1)`

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \hat{F}_n^{\leftarrow}(\alpha) = x_{(k)}, \frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n} \quad (290)$$

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = x_{(\lceil n\alpha \rceil)} \quad (291)$$

mit Interpolation

`quantile(x, probs = 0.9, type = 4)`

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) := x_{(\lfloor n\alpha \rfloor)} + \lambda \cdot x_{(\lceil n\alpha \rceil)} \quad (292)$$

$$\lambda = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \quad (293)$$

TVaR

$$\widehat{\text{TVaR}}_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n(1 - \alpha)} \sum_{k=\lceil n\alpha \rceil+1}^n x_{(k)} \quad (294)$$

Monte Carlo Inversionsmethode

$\exists U \sim \text{Unif}(0, 1)$

$$F^{\leftarrow}(U) \sim F \quad (295)$$

Verwerfungsmethode

$\exists f(x) \leq Mg(x), X \sim g, U \perp\!\!\!\perp X$

$$\mathbb{P}(X \leq t | U \cdot Mg(X) \leq f(X)) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

Importance Sampling

$Y \sim g, X \sim f$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right) \cdot g(x) dx = \mathbb{E} \left(Y \cdot \frac{f(Y)}{g(Y)} \right) \end{aligned}$$

Konfidenzintervall MC

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma}_n := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - S_n)^2}.$$

$$\left[S_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \cdot z_{(1+\alpha)/2}, S_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \cdot z_{(1+\alpha)/2} \right].$$

Einfache Irrfahrt

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p > 0$$

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p > 0$$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= S_0 + n \mathbb{E}(X_1) = S_0 + n(p - q), \\ \mathbb{V}(S_n) &= 4npq, \\ \text{sd}(S_n) &= \sqrt{4pq} \cdot \sqrt{n}\end{aligned}$$

Einfache symmetrische Irrfahrt

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1), S_0 = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = x) &= \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{u+d}{u} \\ n &= u + d, x = u - d \\ d &= \frac{n-x}{2}, u = \frac{n+x}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = x) &= \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{d} = \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{u}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right) =: u_{2n}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) &= \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \\ &= \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right).\end{aligned}$$

Erstwiederkehrzeit

$$W = \inf\{2k \mid k \in \mathbb{N}, S_{2k} = 0\}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W = 2n) = 1 \\ \mathbb{E}(W) &= \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{2n} := \mathbb{P}(W = 2n) &= \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \frac{1}{2n} = \frac{u_{2(n-1)}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n-1} u_{2n}.\end{aligned}$$

Einfache auch asymmetrische Irrfahrten

$$\mathbb{P}(S_n = b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{1}{2}(n+b-a)} q^{\frac{1}{2}(n-b+a)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_n = j + b \mid S_0 = a + b), \\ \mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m = a).\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \dots, S_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m), n \geq 0.$$

Ruin

$$\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ oder } S_n = -B\}$$

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k) &= \mathbb{P}((S_n)_{n \geq 0} \text{ endet in } A \mid S_0 = k) \\ &= \frac{k+B}{A+B}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = (A-k)(k+B).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k) &= \mathbb{P}(S_n \text{ endet in } A \mid S_0 = k) \\ &= \frac{(q/p)^{k+B} - 1}{(q/p)^{A+B} - 1}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = \frac{B+k}{q-p} - \frac{A+B}{q-p} \cdot \frac{1 - (q/p)^{B+k}}{1 - (q/p)^{A+B}}.$$

Markov-Ketten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = s \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= \\ \mathbb{P}(X_n = s \mid X_{n-1} = x_{n-1})\end{aligned}$$

homogen

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Übergangsmatrix

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i).$$

n-Schritt Übergangsmatrix

$$\begin{aligned}p_{ij}(m, m+n) &= \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i) \\ \mathbf{P}(m, m+1) &= \mathbf{P}\end{aligned}$$

Chapman-Kolmogorov Gleichungen

$$\begin{aligned}p_{ij}(m, m+n+r) &= \\ \sum_k p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(m, m+n+r) &= \mathbf{P}(m, m+n) \mathbf{P}(m+n, m+n+r) \\ \mathbf{P}(m, m+n) &= \mathbf{P}^n\end{aligned}$$

Unbedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}^{(m+n)} &= \boldsymbol{\pi}^{(m)} \mathbf{P}^n \\ \boldsymbol{\pi}^{(n)} &= \boldsymbol{\pi}^{(0)} \mathbf{P}^n\end{aligned}$$

Rekurrent (wiederkehrend)

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ für ein } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) = 1.$$

Transient

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ für ein } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) < 1$$

Erstrückkehr

$$T_i = \min\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mathbb{E}(T_i | X_0 = i) \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}(k), & \text{falls } i \text{ rekurrent ist.} \\ \infty, & \text{falls } i \text{ transient ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Stationäre Verteilung

$$\pi^* = \pi^* \mathbf{P}$$

$$\mu_i = \mathbb{E}(T_i | X_0 = i)$$

$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$$

BB

$$\mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = 0, \quad (296)$$

$$\mathbb{V}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = t_i - t_{i-1}. \quad (297)$$

Martingal-Eigenschaft

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s, 0 \leq s \leq t$$

Quadratische Variation

$$[f, f]_T = \lim_{\|\mathcal{Z}\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1, \dots, n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$$

$$[B, B]_T = T \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

$$dB dB = dt$$

$$(dB)^2 = dt.$$

von der symmetrischen Irrfahrt zu BB

$$F^{W^{(n)}(t)}(x) \rightarrow \Phi^{\mu=0, \sigma^2=t}(x), x \in \mathbb{R}.$$

Standardmartingale

1. B_t
2. $B_t^2 - t$
3. $e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$

Itô-Döblin

$$\Delta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

$$\left(\int_0^T \Delta_s dB_s \right) (\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \cdot (B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)).$$

Itô Isometrie

$$\mathbb{E}(I_t^2) = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Delta_s^2 ds \right].$$

$$\|I_t\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|(\Delta_s)\|_{L^2(dt \times d\mathbb{P})}$$

Quadratische Variation

$$[I, I]_t = \int_0^t \Delta_s^2 ds.$$

$$\mathbb{V}(I_t) = \mathbb{E}(I_t^2) = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Delta_s^2 ds \right]$$

Itô-Integral

$$\|(\Delta_s^n - \Delta_s)\|_{L^2(dt \times d\mathbb{P})} = \mathbb{E} \left(\int_0^T (\Delta_s^n - \Delta_s)^2 ds \right) \rightarrow 0$$

$$dI_t = \Delta_t dB_t,$$

Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}(I_t^2) = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Delta_s^2 ds \right] = \int_0^t \mathbb{E} [\Delta_s^2] ds.$$

Quadratische Variation

$$[I, I]_t = \int_0^t \Delta_s^2 ds.$$

$$dI_t dI_t = (dI_t)^2 = \Delta_t^2 dt$$

Itô-Integral

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

Itô-Döblin Formel

$$\begin{aligned} df(t, B_t) &= f'_t(t, B_t) dt + f'_x(t, B_t) dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, B_t) dt \\ &= (f'_t(t, B_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, B_t)) dt \\ &\quad + f'_x(t, B_t) dB_t \end{aligned}$$

Kalkül Regeln

$$(dB_t)^2 = dt$$

sowie

$$\begin{aligned}(dB)(dt) &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \\ (dB)^3 &= 0\end{aligned}$$

Itô-Prozess

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Theta_s ds + \int_0^t \Delta_s dB_s, \quad X_0 \in \mathbb{R},$$

$$dX_t = \Theta_t dt + \Delta_t dB_t.$$

Quadratische Variation

$$[X, X]_t = \int_0^t \Delta_s^2 ds.$$

Itô-Döblin Integral bezüglich dX_t

$$\int_0^t \alpha_s dX_s = \int_0^t \alpha_s \Theta_s ds + \int_0^t \alpha_s \Delta_s dB_s$$

Itô-Döblin Formel

$$\begin{aligned}df(t, X_t) &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)\Theta_t dt + \\ &\quad \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\Delta_t^2 dt \\ &\quad + f'_x(t, X_t)\Delta_t dB_t \\ &= \left(f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t)\Theta_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\Delta_t^2 \right) dt \\ &\quad + f'_x(t, X_t)\Delta_t dB_t\end{aligned}$$

bzw. noch kompakter

$$\begin{aligned}df(t, X_t) &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \\ &\quad \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t) dX_t dX_t\end{aligned}$$

bzw. noch kompakter

$$df = f'_t dt + f'_x dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx} dX dX$$

Geometrische Brown'sche Bewegung

$$S_t = S_0 e^{(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) + \sigma B_t}$$

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dB_t\end{aligned}$$

Vasicek Process

$$R_t = e^{-\beta t} R_0 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s$$

gilt

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma dB_t.$$

Multivariabler stochastischer Kalkül

$$\begin{aligned}dB_{1,t} dB_{1,t} &= dt \\ dB_{2,t} dB_{2,t} &= dt \\ dB_{1,t} dB_{2,t} &= 0 \\ dB_{1,t} dt &= 0 \\ dB_{2,t} dt &= 0 \\ dt dt &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dX_t &= \Theta_{1,t} dt + \sigma_{11,t} dB_{1,t} + \sigma_{12,t} dB_{2,t} \\ dY_t &= \Theta_{2,t} dt + \sigma_{21,t} dB_{1,t} + \sigma_{22,t} dB_{2,t}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df &= f'_t dt + f'_x dX + f'_y dY + \frac{1}{2}f''_{xx} dX dX \\ &\quad + f''_{xy} dX dY + \frac{1}{2}f''_{yy} dY dY\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dX_t dX_t &= (\sigma_{11,t}^2 + \sigma_{12,t}^2) dt \\ dY_t dY_t &= (\sigma_{21,t}^2 + \sigma_{22,t}^2) dt \\ dX_t dY_t &= (\sigma_{11,t} \sigma_{21,t} + \sigma_{12,t} \sigma_{22,t}) dt\end{aligned}$$

Itô Produktregel

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + dX_t Y_t + dX_t dY_t$$

$$dS_1 = \alpha_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dB_1$$

$$dS_2 = \alpha_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 [\rho dB_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dB_2]$$

und

$$B_3 = \rho B_1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_2$$

Exponentialverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\tau \geq 0)$$

$$\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t} \quad (\tau \geq 0)$$

$$\mathbb{P}(\tau > t + s | \tau > s) = \mathbb{P}(\tau > t)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \tau_k.$$

$$N_t = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t < S_1 \\ 1 & \text{falls } S_1 \leq t < S_2 \\ \vdots & \\ n & \text{falls } S_n \leq t < S_{n+1} \end{cases}$$

Gamma

$$g_n(s) = \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda s}, s \geq 0$$

Verteilung Poisson Prozeß

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, \dots$$

Momente des Poisson Prozeß

$$\mathbb{E}(N_t - N_s) = \lambda(t - s)$$

$$\mathbb{V}(N_t - N_s) = \lambda(t - s)$$

Bedingte Erwartungen (Satz Kolmogorov)

a.) Y ist $\mathcal{F}$ -messbar.

b.) Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_F Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F X).$$

Log-Normalverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \phi_{\mu, \sigma}(\ln(x)) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\mathbb{V}(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Fehler gefunden? Ich bin für Hinweise sehr dankbar:
jaegera at htw-berlin punkt de