

Stochastische Prozesse

Manfred Jäger-Ambrożewicz

www.mathfred.de

www.mathstat.de

16. April 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Einfache Irrfahrten	3
1.1 Einführung	3
1.2 Einfache symmetrische Irrfahrt	4
1.3 Einfache (auch asymmetrische) Irrfahrten	14
1.4 Des Spielers Ruin	15
1.5 Wieder die Wiederkehr	20
Quellenverzeichnis	20

1 Einfache Irrfahrten

Quellen: Feller [4], Grimmett & Stirzaker [5], [6], Henze [8], Steele [16], Schilling [13, Kap.12], Privault [12]

1.1 Einführung

1.1.1 Definition: i.) Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen¹, mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i = 1) &= p > 0 \\ \mathbb{P}(X_i = -1) &= q = 1 - p > 0\end{aligned}$$

Ferner sei $S_0 = a$. Der durch

$$\begin{aligned}S_n &= S_0 + \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= a + \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

definierte stochastische Prozess heißt **einfache Irrfahrt** mit Anfangswert a .

ii.) Gilt $p = 1/2$, dann heißt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ **einfache symmetrische Irrfahrt**.

¹Typischerweise in der WT haben Bernoulli ZV das Bild $\{0,1\}$. In Stoch Proz wählen wir $\text{Bild}(X) = \{1, -1\}$. Warum?

1.1.2 Bemerkung: i.) Man kann sich die Irrfahrt als zufällige Bewegung auf \mathbb{Z} vorstellen. Zufällig bewegt sich der *betrunkene Punkt* nach links oder rechts. Machen Sie eine Skizze!

ii.) Zur Illustration betrachten wir auch die Punkte $(n, S_n) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $\omega \in \Omega$ erhalten wir einen Pfad $(n, S_n(\omega)) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$.

n zählt die Anzahl der Schritte (die (horizontale) **Länge des Pfads**). S_n erfasst die vertikale Abweichung.

Schreiben Sie ein R Programm, das symmetrische Irrfahrten simuliert und graphisch darstellt.

1.1.3 Proposition: Es sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= S_0 + n \mathbb{E}(X_1) = S_0 + n(p - q), \\ \mathbb{V}(S_n) &= 4npq, \\ \text{sd}(S_n) &= \sqrt{4pq} \cdot \sqrt{n}\end{aligned}$$

Beweis: DIY (:= Do it yourself)

► Die Streuung gemessen in der Standardabweichung wächst proportional zu \sqrt{n} .

1.2 Einfache symmetrische Irrfahrt

Die einfache symmetrische Irrfahrt (mit Anfangswert 0) ist besonders wichtig. Deshalb werden wir diese ausführlicher betrachten. Später werden wir uns ausführlich mit der **Brown'schen Bewegung** beschäftigen, der wohl der **wichtigste stochastische Prozess** ist. Die Brown'sche Bewegung kann gut durch eine geraffte skalierte symmetrische Irrfahrt approximiert werden.

Feller [4] hat eine besonders einflussreiche Analyse der symmetrischen Irrfahrt vorgelegt. Das Lehrbuch von **Feller** [4] ist berühmt! Hier https://de.wikipedia.org/wiki/William_Feller können Sie etwas über William Feller lesen.

1.2.1 Proposition (Feller [4, S. 68]): Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen, wobei $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1)$ und

$$S_n = 0 + \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

die durch X_i definierte einfache symmetrische Irrfahrt mit Anfangswert $S_0 = 0$. Dann gilt

$$p_{n,x} := \mathbb{P}(S_n = x) = \binom{n}{\frac{1}{2}n+x} \cdot \binom{u+d}{u}$$

dabei ist $n = u + d$ und $x = u - d$.

► u bezeichnet hier die Anzahl der 1'en und d die Anzahl der -1 'en in der Summe S_n .

Bekanntlich zählt der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{u} = \frac{n!}{u!d!} = \binom{n}{d}$$

die Anzahl der Möglichkeiten u 1'en und d (-1) 'en anzuordnen.

Wir beachten: u und d ergeben sich aus n und x . Wir können x als **Vorsprung** auffassen.²

²Feller [4] schreibt p anstatt u und q anstatt d . Wir brauchen aber p und q für die Erfolgswahrscheinlichkeit bzw. die Misserfolgswahrscheinlichkeit.

Wir notieren noch für den späteren Gebrauch

$$\begin{aligned}n &= u + d \\x &= u - d\end{aligned}$$

und durch Umformung noch

$$\begin{aligned}d &= \frac{n - x}{2} \\u &= \frac{n + x}{2}.\end{aligned}$$

Wir können die obige Wahrscheinlichkeit deshalb so angeben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = x) &= \binom{1}{2^n} \cdot \binom{n}{d} = \binom{1}{2^n} \cdot \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \\&= \binom{1}{2^n} \cdot \binom{n}{u}\end{aligned}$$

1.2.2 Proposition: Für die einfache symmetrische Irrfahrt mit Anfangswert $S_0 = 0$ gilt

u_{2n}

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot \binom{1}{2^{2n}} =: u_{2n}$$

► Das folgende sogenannte Spiegelungsprinzip kann erstens noch verallgemeinert werden und hat sich zweitens als außergewöhnlich nützlich erwiesen. In Henze [8] und in Feller [4] kann man dazu sehr viele Argumente finden. ◀

1.2.3 Spiegelungsprinzip (Feller [4, S. 72]): Es sei $A = (a, \alpha) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$, $B = (b, \beta) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ mit $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Dann gilt: Die Anzahl der Pfade von A nach B , die die Nullachse berühren oder schneiden, ist gleich der Anzahl aller Pfade von $A' = (a, -\alpha)$ nach B .

In Worten: Die Anzahl der Pfade von $A = (a, \alpha)$ nach $B = (b, \beta)$ mit

einer Nullstelle, ist gleich der Anzahl aller Pfade von $A' = (a, -\alpha)$ nach $B = (b, \beta)$.

Beweis: Mitschrift SL 20260409

1.2.4 Ballot Theorem (Henze [8, S. 14], Feller [4, S. 73]): Für $n, x \in \mathbb{N}$ gibt es genau $\binom{x}{n} \cdot N_{n,x}$ Pfade der einfachen Irrfahrt mit $S_0 = 0$, $S_1, \dots, S_{n-1} > 0$ und $S_n = x$.

Es gibt also $\binom{x}{n} \cdot N_{n,x}$ nullstellenfreie Pfade von $(0,0)$ nach (n, x) .

Dabei bezeichnet $N_{n,x}$ die Anzahl der Pfade von $(0,0)$ nach (n, x) . Es ist

Hier gibt es un-
ausgesprochene
Konventionen.
Welche?

$$N_{n,x} = \binom{n}{u} = \binom{n}{d} = \binom{u+d}{u},$$

wobei wie gehabt $u + d = n$ und $x = u - d$ bzw. $d = \frac{n-x}{2}$, $u = \frac{n+x}{2}$. u ist die Anzahl der 1'en, die wir benötigen um von $(0,0)$ nach (n, x) zu kommen, und die Anzahl der -1 'en ist d .

Beweis: Zunächst beobachten wir, dass die Anzahl der im Theorem genannten Pfade gleich der Anzahl der Pfade **ohne** Nullstellen von $(1, 1)$ nach (n, x) ist. Die Anzahl der Pfade ohne Nullstellen von $(1, 1)$ nach (n, x) ist dann gleich der Anzahl **aller** Pfade von $(1, 1)$ nach (n, x) **abzüglich** der Pfade **mit** Nullstellen von $(1, 1)$ nach (n, x) .

Jetzt bestimmen wir die **Anzahl aller Pfade** von $(1, 1)$ nach (n, x) . Wir **verschieben dazu das Koordinatensystem** so, dass $(1, 1)$ in den Punkt $(0, 0)$ übergeht. Dann sehen wir, dass die Anzahl aller Pfade von $(1, 1)$ nach (n, x) gleich der Anzahl aller Pfade von $(0, 0)$ nach $(n-1, x-1)$ ist; also gleich $N_{n-1, x-1}$.

Es gilt

$$N_{n-1, x-1} = \binom{u+d-1}{u-1},$$

denn, wir benötigen für einen Pfad von $(0, 0)$ nach $n - 1, x - 1$ im Vergleich zu einem Pfad von $(0, 0)$ zu (n, x) eine $+1$ weniger und einem Schritt weniger. Das können wir uns anhand einer Skizze klar machen oder nachrechnen: Wir bestimmten die Anzahl der nötigen 1 'en und (-1) 'en. Die beide Werte kann man an den Indizes von $N_{n-1, x-1}$ ablesen.

$$u_{\text{verschoben}} = \frac{n - 1 + (x - 1)}{2} = \frac{n + x - 2}{2} = \frac{n + x}{2} - 1 = u - 1$$

$$d_{\text{verschoben}} = \frac{n - 1 - (x - 1)}{2} = \frac{n - x}{2} - 1 = d - 1$$

Jetzt bestimmen wir die **Anzahl aller Pfade** von $(1, 1)$ nach (n, x) **mit Nullstellen**. Gemäß des **Spiegelungsprinzips** ist das gleich der Anzahl aller Pfade von $(1, -1)$ nach (n, x) . Jetzt verschieben wir das Koordinatensystem so, dass der Punkt $(1, -1)$ in den Punkt $(0, 0)$ übergeht. Wir erkennen jetzt, dass die Anzahl aller Pfade von $(1, -1)$ nach (n, x) gleich der Anzahl aller Pfade von $(0, 0)$ nach $(n - 1, x + 1)$ ist; also gleich $N_{n-1, x+1}$.

Es gilt

$$N_{n-1, x+1} = \binom{u + d - 1}{u}$$

wobei wir uns vergewissern, dass es tatsächlich u unten im Binomialkoeffizienten sein muss! Davon können wir uns in einer Skizze vergewissern.

Wir können es aber auch wieder nachrechnen:

$$u_{\text{verschoben}} = \frac{n - 1 + (x + 1)}{2} = \frac{n + x}{2} = u$$

$$d_{\text{verschoben}} = \frac{n - 1 - (x + 1)}{2} = \frac{n - x - 2}{2} = d - 1$$

Dann rechnen wir nach (siehe Mitschrift Mathfred StochProz SL 20260416),

dass

$$\binom{u+d-1}{u-1} - \binom{u+d-1}{u} = \frac{x}{n} \cdot N_{n,x}$$

ist.

1.2.5 Bemerkung: Wir betrachten eine symmetrische Irrfahrt (S_n) mit Anfangswert $S_0 = 0$. Wir haben vorne ermittelt:

$$p_{n,x} := \mathbb{P}(S_n = x) = \frac{N_{n,x}}{2^n} = \frac{\binom{n}{\frac{n+x}{2}}}{2^n} = \frac{\binom{n}{u}}{2^n}$$

und

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

1.2.6 Hauptlemma (Feller [4, S. 76]): Es gilt

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u_{2n}.$$

[das zweite = ist eigentlich nicht Teil der Behauptung, sondern schon bekannt/definiert] Mit Worten: Die Wahrscheinlichkeit einen Pfad der Länge n ohne Nullstellen zu erhalten ist genauso hoch, wie die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfad nach n Schritten n ist.

Beweis: Aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = 2 \cdot \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$$

Wir beachten/betrachten deshalb

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r) \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-2n} \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-2n+1} 2^{-1} \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-(2n-1)} 2^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(N_{2n-1,2r-1} \cdot 2^{-(2n-1)} - N_{2n-1,2r+1} \cdot 2^{-(2n-1)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(N_{2n-1,1} \cdot 2^{-(2n-1)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n-1} = 1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad [\text{siehe unten}] \\
 &= \frac{1}{2} u_{2n}
 \end{aligned}$$

Wir rechnen $\mathbb{P}(S_{2n-1} = 1) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ nach:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_{2n-1} = 1) &= \binom{2n-1}{\frac{2n-1+1}{2}} \frac{1}{2^{2n-1}} = \binom{2n-1}{n} \frac{1}{2^{2n-1}} \\
 &= \binom{2n-1}{n} \frac{2}{2^{2n}} \\
 &= \frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!} \frac{2}{2^{2n}} \\
 &= \frac{2n(2n-1)!}{n!(2n-1-n)! 2n} \frac{2}{2^{2n}} \\
 &= \frac{2n(2n-1)!}{n!(n-1)! n} \frac{1}{2^{2n}} \\
 &= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \\
 &= \mathbb{P}(S_{2n} = 0)
 \end{aligned}$$

1.2.7 Definition: Wir definieren die **Erstwiederkehrzeit**

$$W = \inf\{2k \mid k \in \mathbb{N}, S_{2k} = 0\}.$$

Wenn die ZV W (für einen Pfad) den Wert $2k$ annimmt, dann ist $2k$ der erste Zeitpunkt zudem der Pfad eine Nullstelle hat; also zur 0 zurückkehrt.

1.2.8 Proposition: Es gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 f_{2n} := \mathbb{P}(W = 2n) &= \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \frac{1}{2n} = \frac{u_{2(n-1)}}{2n} \\
 &= \frac{1}{2n-1} u_{2n}.
 \end{aligned}$$

Beweis: Feller [4, S. 78] oder Henze [8, S. 43] Wir beobachten und

nutzen das Hauptlemma

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0\} \setminus \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-2} \neq 0\}) - \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\}) \\ &= u_{2n-2} - u_{2n}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann durch *direktes* Rechnen.

1.2.9 Satz: Der Zustand $S = 0$ der einfachen symmetrischen Irrfahrt ist **null-rekurrent**, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W = 2k) &= \frac{u_{2(k-1)}}{2k} \\ \mathbb{P}(W < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W = 2n) = 1 \\ \mathbb{E}(W) &= \infty \end{aligned}$$

Beweis: Vgl. Henze [8, S. 43] (aber auch Feller [4, S. 78]) Es gilt:

$$\mathbb{P}(W = 2k) = \mathbb{P}(W \geq 2k) - \mathbb{P}(W \geq 2(k+1)).$$

Mit dem Hauptlemma

$$\mathbb{P}(W \geq 2k) = u_{2(k-1)} \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}}$$

Dann weiter mit *direkten* Nachrechnen.

Wir zeigen $\mathbb{P}(W = \infty) = 0$. Es gilt $\{W = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{W \geq 2k\}$. Ferner ist $\{W \geq 2(k+1)\} \subset \{W \geq 2k\}$. Also gilt

$$\{W = \infty\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{W \geq 2k\}$$

Da Wahrscheinlichkeitsmaße stetig sind, folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{W = \infty\}) &= \mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} \{W \geq 2k\}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{W \geq 2k\}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2(k-1)} = 0,\end{aligned}$$

wobei wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} \sqrt{\pi k} = 1$$

verwenden (vgl. Henze [8, S. 27]).

Für die dritte Gleichung der Behauptung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot \mathbb{P}(W = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot \frac{u_{2(k-1)}}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{2(k-1)} = \infty.\end{aligned}$$

Vgl. Henze [8, S. 43f] für einige fehlende Schritte.

► Wir können uns also bei der einfachen symmetrischen Irrfahrt sicher sein, dass sie zur Null zurückfindet, aber wir erwarten, dass es unendlich lange dauert. Das strapaziert und erweitert unsere Anschauung! ◀

► Am Rande: Gemäß Durrett [3, S. 250] findet auch ein betrunkenere Mensch in \mathbb{Z}^2 mit Wahrscheinlichkeit 1 nach Hause zurück, ein betrunkenere Vogel in \mathbb{Z}^3 nicht.³ ◀

³Durrett [3, S. 250]: To steal a joke from Kakutani (U.C.L.A. colloquium talk): *A drunk man will eventually find his way home, but a drunk bird may get lost forever.*

1.3 Einfache (auch asymmetrische) Irrfahrten

1.3.1 Proposition: Es sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt mit $S_0 = a$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(S_n = b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{1}{2}(n+b-a)} q^{\frac{1}{2}(n-b+a)},$$

wobei wir die Binomialkoeffizienten Null sind, falls $\frac{1}{2}(n+b-a) \notin \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Beweis: Wir beachten

$$\begin{aligned} b &= S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i \\ b - a &= \sum_{i=1}^n X_i = u - d \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} u + d &= n \\ u - d &= b - a \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} u &= \frac{n + (b - a)}{2} \\ d &= \frac{n - (b - a)}{2} \end{aligned}$$

Um von a auf b zu kommen, muss $b - a = u - d$ gelten. Wir benötigen also u Einsen und d Minus-Einsen. Bei $n = u + d$ Schritten gibt es dafür $\binom{u+d}{d}$ Möglichkeiten.

Also gilt

$$\mathbb{P}(S_n = b) = \binom{u+d}{d} p^u q^d.$$

Jetzt muss man nur noch die Gleichungen für u und d einsetzen.

1.3.2 Satz: Eine einfache Irrfahrt ist **räumlich und zeitlich homogen**:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_n = j + b \mid S_0 = a + b), \\ \mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m = a).\end{aligned}$$

Beweis: Zu räumlichen Homogenität: Man kommt in n Schritten von a nach j gdw $\sum_{i=1, \dots, n} X_i = j - a$ gilt. Genau dann ist aber auch $\sum_{i=1, \dots, n} X_i = j + b - (a + b)$.

Zur zeitlichen Homogenität: Es gilt $\mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = j - a) = \mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - a)$, wobei das letzte Gleichheitszeichen gilt, denn die X_i haben alle die gleiche Verteilung.

1.3.3 Satz: Eine einfache Irrfahrt hat die **Markov Eigenschaft**:

$$\mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \dots, S_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m), n \geq 0.$$

Beweis: Es gilt $\mathbb{P}((S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \dots, S_m)) = \mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - S_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m)$.

1.4 Des Spielers Ruin

Für diesen Abschnitt verweise ich besonders auf Feller [4, 342ff], Grimmett und Stirzacker [5, S. 18f, 79ff] sowie auf Steele [14, S. 1ff].

1.4.1 Defintion: Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen, wobei $\mathbb{P}(X_i = 1) = p > 0$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q > 0$. Ferner sei $S_0 = k$ und $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, 3, \dots$ die durch $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erzeugte einfache Irrfahrt und $A, B \in \mathbb{N}_0$, $-B \leq k \leq A$. Es sei

$$\tau = \min\{n \geq 0 : S_n = A \text{ oder } S_n = -B\}$$

der zufällige Zeitpunkt zudem die Irrfahrt A oder B erreicht. τ heißt **Stoppzeit der einfachen Irrfahrt mit den absorbierenden Rändern A und $-B$** .

1.4.2 Satz: Die Stoppzeit einer einfachen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ ist mit Wahrscheinlichkeit 0 unendlich, also

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$$

Beweis: SL

1.4.3 Satz: Für die einfache symmetrische Irrfahrt $p = \frac{1}{2}$ mit absorbierenden Rändern A und $-B$ und Anfangswert $k \in \{-B, \dots, 0, \dots, A\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_\tau = A | S_0 = k) &= \mathbb{P}((S_n)_{n \geq 0} \text{ endet in } A | S_0 = k) \\ &= \frac{k + B}{A + B}. \end{aligned}$$

Beweis (vgl. Steele [16, S. 2]): Wir betrachten

$$f(k) = \mathbb{P}(S_\tau = A | S_0 = k).$$

Dann gilt die Differenzgleichung

$$f(k) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1)$$

und die Randbedingungen

$$f(-B) = 0$$

$$f(A) = 1.$$

Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Differenzgleichung mit Randbedingungen zu lösen. Dafür gibt es systematische Methoden. Wir machen einen Ansatz und setzen $f(-B + 1) = \alpha$. Jetzt verwenden wir die Differenzgleichungen und erhalten

$$f(-B + 1) = \frac{1}{2}f(-B) + \frac{1}{2}f(-B + 2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}f(-B + 2)$$

also

$$2\alpha = f(-B + 2).$$

Jetzt setzen wir $f(-B + 2)$, $f(-B + 1)$ in die Differenzgleichung ein und erhalten

$$f(-B + 2) = \frac{1}{2}f(-B + 1) + \frac{1}{2}f(-B + 3)$$

$$2\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}f(-B + 3)$$

$$4\alpha = \alpha + f(-B + 3)$$

$$3\alpha = f(-B + 3)$$

Allgemein erhalten wir

$$f(-B + k) = k\alpha.$$

Wir haben die zweite Randbedingung noch nicht verwendet! Damit folgt

$$1 = f(A) = f(-B + B + A) = \alpha(B + A)$$

Also

$$\alpha = \frac{1}{A + B}$$

Also

$$f(-B + k) = \frac{k}{A + B}$$

bzw.

$$f(k) = f(-B + B + k) = \frac{B + k}{A + B}$$

1.4.4 Satz: Für die Stopzeit einer einfachen symmetrischen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ gilt

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = (A - k)(k + B).$$

Beweis (vgl. Steele [16, S. 2]): Wir betrachten

$$g(k) = \mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k).$$

Dann gilt

$$g(k) = \frac{1}{2}g(k - 1) + \frac{1}{2}g(k + 1) + 1$$

und

$$g(-B) = 0 \text{ und } g(A) = 0.$$

Dann beobachten wir

$$\begin{aligned}
 g(k) &= \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1) + 1 \\
 \Rightarrow g(k) - g(k-1) &= g(k+1) - g(k) + 2 \\
 \Rightarrow g(k) - g(k-1) &= g(k+1) - g(k) + 2 \\
 \Rightarrow \Delta g(k-1) &= \Delta g(k) + 2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta^2 g(k-1) &= -1
 \end{aligned}$$

Auf Basis dieser Gleichung ist es naheliegend, dass g quadratisch in k ist (die zweite *Ableitung* ist konstant). Zudem kennen wir zwei Nullstellen A und $-B$. Dann kann man $(A-k)(k+B)$ ansetzen und nachweisen, dass dieser Ansatz alle drei Bedingungen erfüllt.

1.4.5 Satz: Für die einfache asymmetrische Irrfahrt $p \neq 1/2$ und absorbierenden Rändern A und $-B$ und Anfangswert $k \in \{-B, \dots, 0, \dots, A\}$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = A \mid S_0 = k) = \mathbb{P}(S_n \text{ endet in } A \mid S_0 = k) = \frac{(q/p)^{k+B} - 1}{(q/p)^{A+B} - 1}.$$

Beweis: Übung

1.4.6 Satz: Für die Stoppzeit einer einfachen asymmetrischen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ gilt

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = \frac{B+k}{q-p} - \frac{A+B}{q-p} \cdot \frac{1 - (q/p)^{B+k}}{1 - (q/p)^{A+B}}.$$

Beweis: Übung

1.5 Wieder die Wiederkehr

Dieser Abschnitt ist kurz und behandelt nur einen Satz. Für den Beweis verweise ich auf Grimmett und Stirzacker [5, S. 183ff]. Der Beweis dort verwendet erzeugende Funktionen.

1.5.1 Satz: Es sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine einfache nicht notwendigerweise symmetrische Irrfahrt und $S_0 = 0$. Dann gilt:

i.) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Irrfahrt jemals zu Null zurückkehrt ist $1 - |p - q|$.

Also: Die einfache symmetrische und nur die einfache symmetrische Irrfahrt kehrt sicher (d.h. mit Wahrscheinlichkeit = 1) zur Null zurück. Bei einer asymmetrischen Irrfahrt tritt die Rückkehr zur Null nur mit einer Wahrscheinlichkeit < 1 .

ii.) Für die einfache symmetrische Irrfahrt tritt die Rückkehr zur Null mit Wahrscheinlichkeit 1 ein, aber der Erwartungswert für die Dauer bis zur Rückkehr ist ∞ .

1.5.2 Bemerkung: Man sagt, dass 0 für $p = 1/2$ **rekurrent** ist. Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist 0 flüchtig, vorübergehend oder **transient**.

Literaturverzeichnis

- [1] Patrick **Billingsley**, 1995, Probability and Measure, 3th. Auflage-
Wiley
- [2] Robert **Dobrow**; 2016; Introduction to Stochastic Processes with
R; Wiley
- [3] Rick **Durrett**; 2021; Probability – Theory and Examples; 5ed;
Cambridge University Press
- [4] William **Feller**; 1968; An Introduction to Probability – Theory and
its Application; 3ed; Wiley.
- [5] Geoffrey **Grimmett** und David **Strikzaker**; 2020; Probability and
Random Processes, Fourth Edition, Oxford University Press
- [6] Geoffrey **Grimmett** und David **Strikzaker**; 2020; One thousand
exercises in probability, Third Edition, Oxford University Press
- [7] Norbert **Henze**; 2019; Stochastik – Einführung mit Grundzügen
der Maßtheorie, Springer
- [8] Norbert **Henze**; 2024; Irrfahrten – Faszinationen der Faszination
der Random Walks; 3. Auflage; Springer
- [9] Fima **Klebaner**; 2012; Introduction to Stochastic Calculus; Third
Edition; Imperial College Press
- [10] Olga **Korosteleva**; 2022; Stochastic Processes in R; CRC Press

- [11] Stephan **Norris**; 1998; Markov Chains; Cambridge University Press
- [12] Nicolas **Privault**; 2018; Understanding Markov Chains; 2te Auflage; Springer
- [13] Rene **Schilling**; 2018; Martingale und Prozesse; De Gruyter
- [14] Rene **Schilling**; 2021; Brownian Motion; De Gruyter
- [15] Steven **Shreve**; 2004; Stochastic Calculus for Finance 2; Springer.
- [16] Michael **Steele**; 2010; Stochastic Calculus and Financial Applications; Springer.
- [17] Anders **Tolver**; An Introduction to Markov Chains; <http://web.math.ku.dk/noter/filer/stoknoter.pdf>.