Stochastische Prozesse

Manfred Jäger-Ambrożewicz

www.mathfred.de

www.mathstat.de

7. Mai 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Einfache Irrfahrten

Quellen: Feller [4], Grimmett & Stirzaker [5], [6], Henze [8], Steele [18], Schilling [15, Kap.12], Privault [14]

1.1 Einführung

1.1.1 Defintion: i.) Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen[1], mit

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p > 0$$
$$\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p > 0$$

[1] Typischerweise in der WT haben Bernoulli ZV das Bild $\{0, 1\}$. In Stoch Proz wählen wir $\text{Bild}(X) = \{1, -1\}$. Warum?

Ferner sei $S_0 = a$ (der Anfangswert, oft 0). Der durch

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = 1, 2, 3, ...) \\ &= a + \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = 1, 2, 3, ...) \end{aligned}$$

definierte stochastische Prozess heißt **einfache Irrfahrt** mit Anfangswert a.

ii.) Gilt $p = 1/2$, dann heißt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ **einfache symmetrische Irrfahrt**.

1.1.2 Bemerkung: i.) Man kann sich die Irrfahrt als zufällige Bewegung auf $\mathbb{Z}$ vorstellen. Zufällig bewegt sich der *betrunkene Punkt* nach links oder rechts. Machen Sie eine Skizze!

ii.) Zur Illustration betrachten wir auch die Punkte $(n, S_n) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $\omega \in \Omega$ erhalten wir einen Pfad $(n, S_n(\omega)) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$.

n zählt die Anzahl der Schritte (die (horizontale) **Länge des Pfads**). S_n erfasst die vertikale Abweichung.

Schreiben Sie ein Python Skript oder ein R Skript, das symmetrische Irrfahrten simuliert und graphisch darstellt.

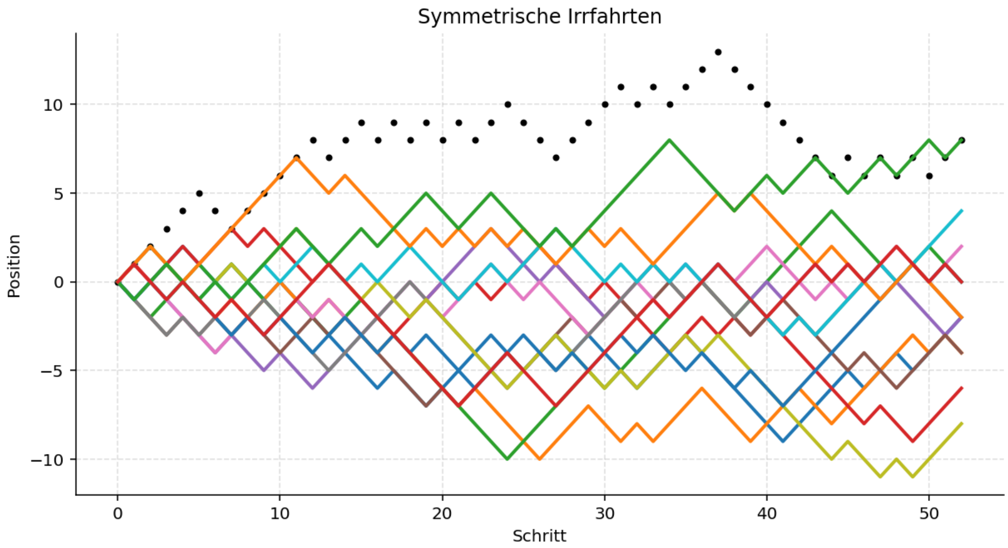

Abbildung 1.1: Pfade der symmetrischen Irrfahrt mit 52 Schritten.

1.1.3 Proposition: Es sei $(S_n)_{n\in N_0}$ eine einfache Irrfahrt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= S_0 + n\,\mathbb{E}(X_1) = S_0 + n(p-q),\\
\mathbb{V}(S_n) &= 4npq,\\
\mathrm{sd}(S_n) &= \sqrt{4pq}\cdot\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Beweis: DIY (:= Do it yourself)

► Die Streuung gemessen in der Standardabweichung wächst proportional zu $\sqrt{n}$.

1.1.4 Proposition: Es sei $(S_n)_{n\in N_0}$ eine einfache Irrfahrt mit $S_0 = a$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(S_n = b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{1}{2}(n+b-a)} q^{\frac{1}{2}(n-b+a)},$$

wobei wir die Binomialkoeffizienten Null sind, falls $\frac{1}{2}(n+b-a) \notin \{0,1,2,...,n\}$.

Beweis: Wir beachten

$$b = S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$b - a = \sum_{i=1}^{n} X_i = u - d$$

Aus den beiden Gleichungen

$$u + d = n$$
$$u - d = b - a$$

folgt

$$u = \frac{n + (b-a)}{2}$$
$$d = \frac{n - (b-a)}{2}$$

Um von a auf b zu kommen, muss $b - a = u - d$ gelten. Wir benötigen also u Einsen und d Minus-Einsen. Bei $n = u + d$ Schritten gibt es dafür $\binom{u+d}{d}$ Möglichkeiten.

Also gilt

$$\mathbb{P}(S_n = b) = \binom{u+d}{d} p^u q^d.$$

Jetzt muss man nur noch die Gleichungen für u und d einsetzen.

1.2 Einfache symmetrische Irrfahrt

Die einfache symmetrische Irrfahrt (mit Anfangswert 0) ist besonders wichtig. Deshalb werden wir diese ausführlicher betrachten. Später werden wir uns ausführlich mit der **Brown'schen Bewegung** beschäftigen, der wohl der **wichtigste stochastische Prozess** ist. Die Brown'sche Bewegung kann gut durch eine geraffte skalierte symmetrische Irrfahrt approximiert werden.

Feller [4] hat eine besonders einflussreiche Analyse der symmetrischen Irrfahrt vorgelegt. Das Lehrbuch von **Feller** [4] ist berühmt! Hier `https://de.wikipedia.org/wiki/William_Feller` können Sie etwas über William Feller lesen.

1.2.1 Proposition (Feller [4, S. 68]): Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen, wobei

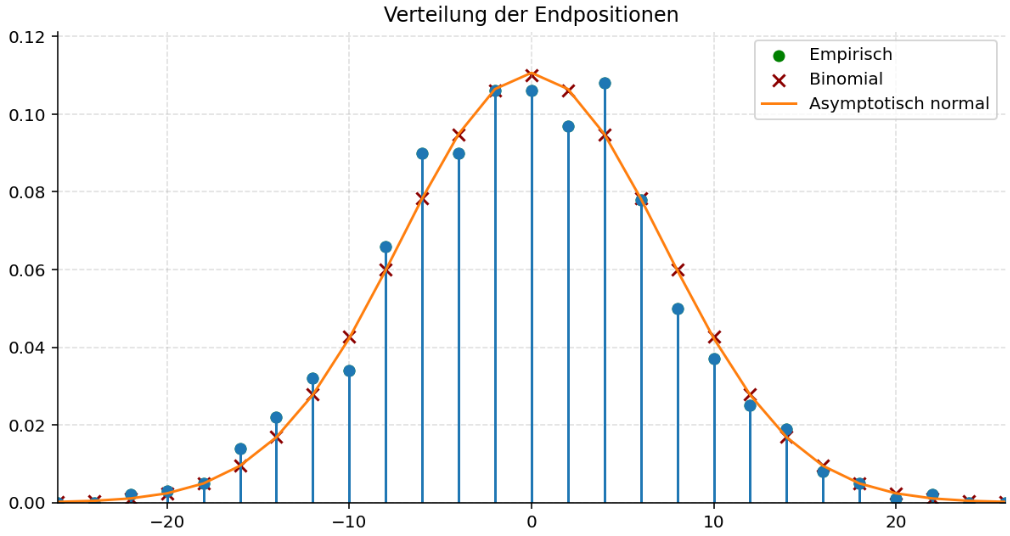

Abbildung 1.2: Verteilung von S_{52}. Empirisch: Monte Carlo mit 1000 Pfaden.

$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1)$ und

$$S_n = 0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die durch X_i definierte einfache symmetrische Irrfahrt mit Anfangswert $S_0 = 0$. Dann gilt

$$p_{n,x} := \mathbb{P}(S_n = x) = \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{u+d}{u}$$

dabei ist $n = u + d$ und $x = u - d$.

▶ u bezeichnet hier die Anzahl der 1'en und d die Anzahl der -1'en in der Summe S_n.

Bekanntlich zählt der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{u} = \frac{n!}{u!d!} = \binom{n}{d}$$

die Anzahl der Möglichkeiten u 1'en und d (-1)'en anzuordnen.

Wir beachten: u und d ergeben sich aus n und x. Wir können x als **Vorsprung** auffassen.[2]

Wir notieren noch für den späteren Gebrauch

$$n = u + d$$
$$x = u - d$$

und durch Umformung noch

$$d = \frac{n - x}{2}$$
$$u = \frac{n + x}{2}.$$

Wir können die obige Wahrscheinlichkeit deshalb so angeben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = x) &= \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{d} = \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \binom{n}{u}\end{aligned}$$

1.2.2 Proposition: Für die einfache symmetrische Irrfahrt

[2] Feller [4] schreibt p anstatt u und q anstatt d. Wir brauchen aber p und q für die Erfolgswahrscheinlichkeit bzw. die Misserfolgswahrscheinlichkeit.

mit Anfangswert $S_0 = 0$ gilt u_{2n}

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right) =: u_{2n}$$

▶ Das folgende sogenannte Spiegelungsprinzip kann erstens noch verallgemeinert werden und hat sich zweitens als außergewöhnlich nützlich erwiesen. In Henze [8] und in Feller [4] kann man dazu sehr viele Argumente finden. ◀

1.2.3 Spiegelungsprinizip (Feller [4, S. 72]): Es sei $A = (a, \alpha) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, B = (b, \beta) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ mit $b > a \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$. Dann gilt: Die Anzahl der Pfade von A nach B, die die Nullachse berühren oder schneiden, ist gleich der Anzahl aller Pfade von $A' = (a, -\alpha)$ nach B.

In Worten: Die Anzahl der Pfade von $A = (a, \alpha)$ nach $B = (b, \beta)$ mit einer Nullstelle, ist gleich der Anzahl aller Pfade von $A' = (a, -\alpha)$ nach $B = (b, \beta)$.

Beweis: Mitschrift SL 20260409

1.2.4 Ballot Theorem (Henze [8, S. 14], Feller [4, S. 73]): Für $n, x \in \mathbb{N}$ gibt es genau $\left(\frac{x}{n}\right) \cdot N_{n,x}$ Pfade der einfachen Irrfahrt mit $S_0 = 0$, $S_1, ..., S_{n-1} > 0$ und $S_n = x$.

Es gibt also $\left(\frac{x}{n}\right) \cdot N_{n,x}$ nullstellenfreie Pfade von $(0, 0)$ nach (n, x).

Dabei bezeichnet $N_{n,x}$ die Anzahl der Pfade von $(0,0)$ nach (n,x). Es ist

Hier gibt es unausgesprochene Konventionen. Welche?

$$N_{n,x} = \binom{n}{u} = \binom{n}{d} = \binom{u+d}{u},$$

wobei wie gehabt $u+d=n$ und $x=u-d$ bzw. $d=\frac{n-x}{2}$, $u=\frac{n+x}{2}$. u ist die Anzahl der 1'en, die wir benötigen um von $(0,0)$ nach (n,x) zu kommen, und die Anzahl der -1'en ist d.

Beweis: Zunächst beobachten wir, dass die Anzahl der im Theorem genannten Pfade gleich der Anzahl der Pfade **ohne** Nullstellen von $(1,1)$ nach (n,x) ist. Die Anzahl der Pfade ohne Nullstellen von $(1,1)$ nach (n,x) ist dann gleich der Anzahl **aller** Pfade von $(1,1)$ nach (n,x) **abzüglich** der Pfade **mit** Nullstellen von $(1,1)$ nach (n,x).

Jetzt bestimmen wir die **Anzahl aller Pfade** von $(1,1)$ nach (n,x). Wir **verschieben dazu das Koordinatensystem** so, dass $(1,1)$ in den Punkt $(0,0)$ übergeht. Dann sehen wir, dass die Anzahl aller Pfade von $(1,1)$ nach (n,x) gleich der Anzahl aller Pfade von $(0,0)$ nach $(n-1,x-1)$ ist; also gleich $N_{n-1,x-1}$.

Es gilt

$$N_{n-1,x-1} = \binom{u+d-1}{u-1},$$

denn, wir benötigen für einen Pfad von $(0,0)$ nach $n-1, x-1$

im Vergleich zu einem Pfad von $(0,0)$ zu (n,x) eine $+1$ weniger und einem Schritt weniger. Das können wir uns anhand einer Skizze klar machen oder nachrechnen: Wir bestimmten die Anzahl der nötigen 1'en und (-1)'en. Die beide Werte kann man an den Indizes von $N_{n-1,x-1}$ ablesen.

$$u_{\text{verschoben}} = \frac{n-1+(x-1)}{2} = \frac{n+x-2}{2} = \frac{n+x}{2} - 1 = u - 1$$
$$d_{\text{verschoben}} = \frac{n-1-(x-1)}{2} = \frac{n-x}{2} - 1 = d - 1$$

Jetzt bestimmen wir die **Anzahl aller Pfade** von $(1,1)$ nach (n,x) **mit Nullstellen**. Gemäß des **Spiegelungsprinzips** ist das gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ nach (n,x). Jetzt verschieben wir das Koordinatensystem so, dass der Punkt $(1,-1)$ in den Punkt $(0,0)$ übergeht. Wir erkennen jetzt, dass die Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ nach (n,x) gleich der Anzahl aller Pfade von $(0,0)$ nach $(n-1,x+1)$ ist; also gleich $N_{n-1,x+1}$.

Es gilt

$$N_{n-1,x+1} = \binom{u+d-1}{u}$$

wobei wir uns vergewissern, dass es tatsächlich u unten im Binomialkoeffizienten sein muss! Davon können wir uns in einer Skizze vergewissern. Wir können es aber auch wieder nachrechnen:

$$u_{\text{verschoben}} = \frac{n-1+(x+1)}{2} = \frac{n+x}{2} = u$$
$$d_{\text{verschoben}} = \frac{n-1-(x+1)}{2} = \frac{n-x-2}{2} = d-1$$

Dann rechnen wir nach (siehe Mitschrift Mathfred StochProz SL 20260416), dass

$$\binom{u+d-1}{u-1} - \binom{u+d-1}{u} = \frac{x}{n} \cdot N_{n,x}$$

ist.

1.2.5 Bemerkung: Wir betrachten eine symmetrische Irrfahrt (S_n) mit Anfangswert $S_0 = 0$. Wir haben vorne ermittelt:

$$p_{n,x} := \mathbb{P}(S_n = x) = \frac{N_{n,x}}{2^n} = \frac{\binom{n}{\frac{n+x}{2}}}{2^n} = \frac{\binom{n}{u}}{2^n}$$

und

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

1.2.6 Hauptlemma (Feller [4, S. 76]): Es gilt

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u_{2n}.$$

[das zweite = ist eigentlich nicht Teil der Behauptung, sondern schon bekannt/definiert] Mit Worten: Die Wahrscheinlichkeit einen Pfad der Länge n ohne Nullstellen zu erhalten ist genauso hoch, wie die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfad nach n Schritten n ist.

Beweis: Aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) = 2 \cdot \mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)$$

Wir beachten/betrachten deshalb

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 > 0, ..., \; S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-2n} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-2n+1} 2^{-1} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} (N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}) \cdot 2^{-(2n-1)} 2^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(N_{2n-1,2r-1} \cdot 2^{-(2n-1)} - N_{2n-1,2r+1} \cdot 2^{-(2n-1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(N_{2n-1,1} \cdot 2^{-(2n-1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(S_{2n-1} = 1\right) = \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) \qquad \text{[siehe unten]} \\
&= \frac{1}{2} u_{2n}
\end{aligned}
$$

Wir rechnen $\mathbb{P}\left(S_{2n-1} = 1\right) = \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right)$ nach:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{2n-1} = 1\right) &= \binom{2n-1}{\frac{2n-1+1}{2}} \frac{1}{2^{2n-1}} = \binom{2n-1}{n} \frac{1}{2^{2n-1}} \\
&= \binom{2n-1}{n} \frac{2}{2^{2n}} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!} \frac{2}{2^{2n}} \\
&= \frac{2n(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!\,2n} \frac{2}{2^{2n}} \\
&= \frac{2n(2n-1)!}{n!(n-1)!\,n} \frac{1}{2^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \\
&= \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right)
\end{aligned}
$$

1.2.7 Definition: Wir definieren die **Erstwiederkehrzeit**

$$W = \inf\{2k \mid k \in \mathbb{N}, S_{2k} = 0\}.$$

Wenn die ZV W (für einen Pfad) den Wert $2k$ annimmt, dann ist $2k$ der erste Zeitpunkt zudem der Pfad eine Nullstelle hat; also zur 0 zurückkehrt.

1.2.8 Proposition: Es gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f_{2n} := \mathbb{P}(W = 2n) &= \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \frac{1}{2n} = \frac{u_{2(n-1)}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n-1} u_{2n}. \end{aligned}$$

Beweis: Feller [4, S. 78] oder Henze [8, S. 43] Wir beobachten und nutzen das Hauptlemma

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, ..., S_{2n-2} \neq 0\} \setminus \{S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, ..., S_{2n-2} \neq 0\}) - \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) \\ &= u_{2n-2} - u_{2n}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann durch *direktes/mühsames* Rechnen.

$$\binom{2n-2}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right) - \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = ...$$

1.2.9 Satz: Der Zustand $S = 0$ der einfachen symmetri-

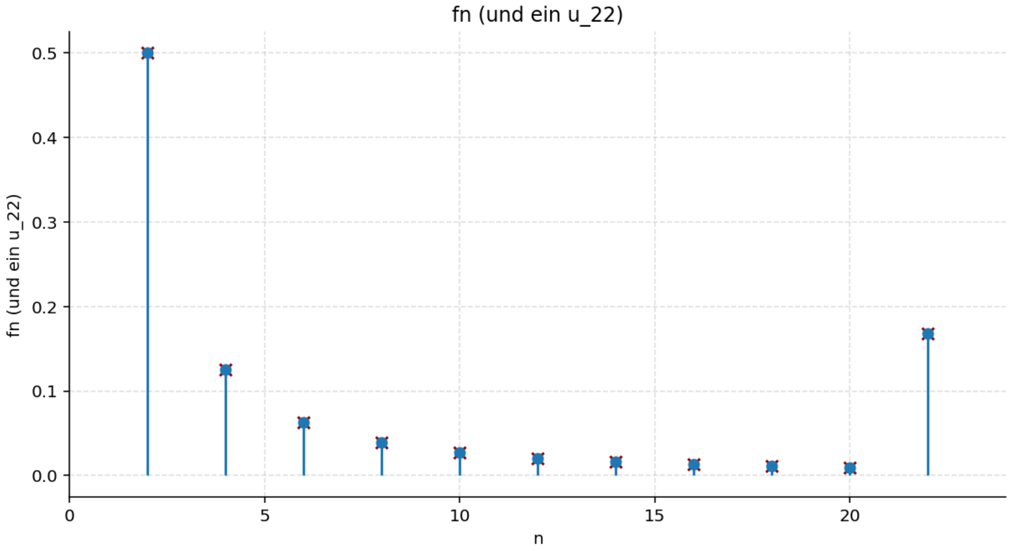

Abbildung 1.3: Die Wahrscheinlichkeiten $f_n, n = 2, 4, ..., 20$ und u_{22}.

schen Irrfahrt ist **null-rekurrent**, d.h.

$$\mathbb{P}(W < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W = 2n) = 1$$
$$\mathbb{E}(W) = \infty$$

Beweis: Vgl. Henze [8, S. 43] (aber auch Feller [4, S. 78]). Die erste Formel haben wir bereits vorne festgestellt.

Wir zeigen $\mathbb{P}(W = \infty) = 0$. Es gilt $\{W = \infty\} = \cap_{k=1}^{\infty}\{W \geq 2k\}$. Ferner ist $\{W \geq 2(k+1)\} \subset \{W \geq 2k\}$. Also gilt

$$\{W = \infty\} = \lim_{k\to\infty}\{W \geq 2k\}$$

Da Wahrscheinlichkeitsmaße stetig sind, folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{W = \infty\}) &= \mathbb{P}(\lim_{k\to\infty}\{W \geq 2k\}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\{W \geq 2k\}) \\ &= \lim_{k\to\infty} u_{2(k-1)} = 0,\end{aligned}$$

wobei wir

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k}\sqrt{\pi k} = 1$$

verwenden (vgl. Henze [8, S. 27]).

Für die dritte Gleichung der Behauptung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot \mathbb{P}(W = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot \frac{u_{2(k-1)}}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{2(k-1)} = \infty.\end{aligned}$$

Vgl. Henze [8, S. 43f] für einige fehlende Schritte.

▶ Wir können uns also bei der einfachen symmetrischen Irrfahrt sicher sein, dass sie zur Null zurückfindet, aber wir erwarten, dass es unendlich lange dauert. Das strapaziert und erweitert unsere Anschauung! ◀

▶ Am Rande: Gemaß Durrett [3, S. 250] findet auch ein betrunkener Mensch in $\mathbb{Z}^2$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nach Hause zurück, ein betrunkener Vogel in $\mathbb{Z}^3$ nicht.[3] ◀

1.3 Homogenität und Markov-Eigenschaft

Für diesen Abschnitt verweise ich besonders auf Grimmett und Stirzacker [5, S. 18f, 79ff].

1.3.1 Satz: Eine einfache Irrfahrt ist **räumlich und zeitlich homogen**:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_n = j + b \mid S_0 = a + b),\\ \mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) &= \mathbb{P}(S_{m+n} = j \mid S_m = a).\end{aligned}$$

Beweis: Zu räumlichen Homogenität: Man kommt in n Schritten von a nach j gdw $\sum_{i=1,\dots,n} X_i = j - a$ gilt. Genau dann ist aber auch $\sum_{i=1,\dots,n} X_i = j + b - (a + b)$. Also kommt man in n Schritten von $a + b$ nach $j + b$.

Zur zeitlichen Homogenität: Es gilt $\mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = a) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a) = \mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - a)$, wobei das letzte Gleichheitszeichen gilt, denn die X_i haben alle die gleiche Verteilung.

1.3.2 Satz: Eine einfache Irrfahrt hat die **Markov Eigen-**

[3] Durrett [3, S. 250]: To steal a joke from Kakutani (U.C.L.A. colloquium talk): *A drunk man will eventually find his way home, but a drunk bird may get lost forever.*

schaft:

$$\mathbb{P}(S_{m+n} = j \,|\, S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_m = s_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j \,|\, S_m = s_m), n$$

Also: Für die Zukunft ist von der Geschichte nur die Gegenwart relevant. Oder: The future is independent of the past given the present.

Beweis: Es gilt $\mathbb{P}(S_{m+n} = j \,|\, S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_m = s_m) = \mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{n+m} X_i = j - s_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j \,|\, S_m = s_m)$.

1.4 Des Spielers Ruin

Für diesen Abschnitt verweise ich besonders auf Feller [4, 342ff], Grimmett und Stirzacker [5, S. 18f, 79ff] sowie auf Steele [16, S. 1ff].

1.4.1 Defintion: Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli Zufallsvariablen, wobei $\mathbb{P}(X_i = 1) = p > 0, \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q > 0$. Ferner sei $S_0 = k$ und $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, 3, ...$ die durch $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erzeugte einfache Irrfahrt und $A, B \in \mathbb{N}_0, -B \leq k \leq A$. Es sei

$$\tau = \min\{n \geq 0 \,:\, S_n = A \text{ oder } S_n = -B\}$$

der zufällige Zeitpunkt zudem die Irrfahrt A oder B erreicht.

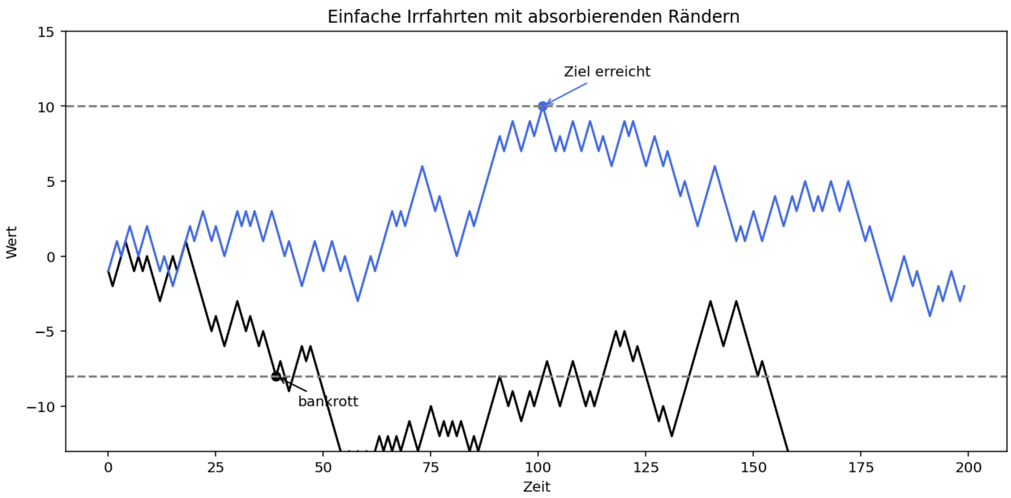

Abbildung 1.4: Die blaue Irrfahrt erreicht das Ziel (ohne vorher bankrott zu gehen). Der schwarze nicht :-(

τ heißt **Stoppzeit der einfachen Irrfahrt mit den absorbierenden Rändern** A und $-B$.

1.4.2 Satz: Die Stoppzeit einer einfachen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ ist mit Wahrscheinlichkeit 0 unendlich, also

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$$

Beweis: SL

1.4.3 Satz: Für die einfache symmetrische Irrfahrt – also mit $p = \frac{1}{2}$ – und absorbierenden Rändern A und $-B$ und

Anfangswert $k \in \{-B, ..., 0, ..., A\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_\tau = A | S_0 = k) &= \mathbb{P}((S_n)_{n\geq 0} \text{ endet in } A \,|\, S_0 = k) \\ &= \frac{k+B}{A+B}.\end{aligned}$$

Beweis (vgl. Steele [18, S. 2]): Wir betrachten

$$f(k) = \mathbb{P}(S_\tau = A | S_0 = k).$$

Dann gilt die Differenzengleichung

$$f(k) = \frac{1}{2} f(k-1) + \frac{1}{2} f(k+1)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(-B) &= 0 \\ f(A) &= 1. \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Differenzengleichung mit Randbedingungen zu lösen. Dafür gibt es systematische Methoden. Wir machen einen Ansatz und setzen $f(-B+1) = \alpha$. Jetzt verwenden wir die Differenzengleichungen und erhalten

$$\begin{aligned} f(-B+1) &= \frac{1}{2} f(-B) + \frac{1}{2} f(-B+2) \\ \alpha &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} f(-B+2) \end{aligned}$$

also

$$2\alpha = f(-B+2).$$

Jetzt setzen wir $f(-B+2), f(-B+1)$ in die Differenzengleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}
f(-B+2) &= \frac{1}{2}f(-B+1) + \frac{1}{2}f(-B+3) \\
2\alpha &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}f(-B+3) \\
4\alpha &= \alpha + f(-B+3) \\
3\alpha &= f(-B+3)
\end{aligned}$$

Allgemein erhalten wir

$$f(-B+k) = k\alpha.$$

Wir haben die zweite Randbedingung noch nicht verwendet! Damit folgt

$$1 = f(A) = f(-B+B+A) = \alpha(B+A)$$

Also

$$\alpha = \frac{1}{A+B}$$

Also

$$f(-B+k) = \frac{k}{A+B}$$

bzw.

$$f(k) = f(-B+B+k) = \frac{B+k}{A+B}$$

1.4.4 Satz: Für die Stoppzeit einer einfachen symmetrischen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ gilt

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = (A-k)(k+B).$$

Beweis (vgl. Steele [18, S. 2]): Wir betrachten

$$g(k) = \mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k).$$

Dann gilt[4]

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{2}(1+g(k-1)) + \frac{1}{2}(1+g(k+1)) \\ &= \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1) + 1 \end{aligned}$$

und

$$g(-B) = 0 \text{ und } g(A) = 0.$$

[4] Dabei beachten wir das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit für Erwartungswerte (Grimmett und Stirzaker [5, 72]): $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}(Y|A_i)\mathbb{P}(A_i)$

Dann beobachten wir

$$\begin{aligned} & g(k) = \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1) + 1 \\ \Rightarrow\quad & g(k) - g(k-1) = g(k+1) - g(k) + 2 \\ \Rightarrow\quad & g(k) - g(k-1) = g(k+1) - g(k) + 2 \\ \Rightarrow\quad & \Delta g(k-1) = \Delta g(k) + 2 \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{2}\Delta^2 g(k-1) = -1 \end{aligned}$$

Auf Basis dieser Gleichung ist es naheliegend, dass g quadratisch in k ist (die zweite *Ableitung* ist konstant). Zudem kennen wir zwei Nullstellen A und $-B$. Dann kann man $(A-k)(k+B)$ ansetzen und nachweisen, dass dieser Ansatz alle drei Bedingungen erfüllt.

1.4.5 Satz: Für die einfache asymmetrische Irrfahrt $p \neq 1/2$ und absorbierenden Rändern A und $-B$ und Anfangswert $k \in \{-B, ..., 0, ..., A\}$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = A \,|\, S_0 = k) = \mathbb{P}(S_n \text{ endet in } A \,|\, S_0 = k) = \frac{(q/p)^{k+B} - 1}{(q/p)^{A+B} - 1}.$$

Beweis: Übung bzw. Steele [18, Seite 6]

1.4.6 Satz: Für die Stoppzeit einer einfachen asymmetrischen Irrfahrt mit absorbierenden Rändern A und $-B$ gilt

$$\mathbb{E}(\tau \mid S_0 = k) = \frac{B+k}{q-p} - \frac{A+B}{q-p} \cdot \frac{1-(q/p)^{B+k}}{1-(q/p)^{A+B}}.$$

Beweis: Übung

1.5 Nachtrag zur Wiederkehr

Dieser Abschnitt ist kurz und behandelt nur einen Satz. Für den Beweis verweise ich auf Grimmett und Stirzacker [5, S. 183ff]. Der Beweis dort verwendet erzeugende Funktionen.

1.5.1 Satz: Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache nicht notwendigerweise symmetrische Irrfahrt und $S_0 = 0$. Dann gilt:

i.) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Irrfahrt jemals zu Null zurückkehrt ist $1 - |p-q|$.

Also: Die einfache symmetrische und nur die einfache symmetrische Irrfahrt kehrt sicher (d.h. mit Wahrscheinlichkeit $= 1$) zur Null zurück. Bei einer asymmetrischen Irrfahrt tritt die Rückkehr zur Null nur mit einer Wahrscheinlichkeit < 1.

ii.) Für die einfache symmetrische Irrfahrt tritt die Rückkehr zur Null mit Wahrscheinlichkeit 1 ein, aber der Erwartungswert für die Dauer bis zur Rückkehr ist ∞.

1.5.2 Bemerkung: Man sagt, dass 0 für $p = 1/2$ **rekurrent** ist. Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist 0 flüchtig, vorübergehend oder **transient**.

2 Markov-Ketten

Dieses Kapitel beruht auf **Grimmett und Stirzaker** [5] und **Henze** [7] sowie Billingsley [1]. Norris [13], Tolver [19] und Privault [14] sind weitere gute Quellen. Die beiden Bücher Korosteleva [12] und Dobrow [2] sind anwendungsorientiert und es gibt zudem nützlichen R Code, den Sie gut als Ausgangspunkt für eine Programmierungen nehmen können.

2.1 Definition

2.1.1 Definiton: Ein **zeit-diskreter stochastischer Prozess** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit **Werten in einer höchstens abzählbaren Menge** S heißt **Markov-Kette**, falls er die Markov-Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X_n = s|X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = s|X_{n-1} = x_{n-1})$$

für alle $n \geq 1, x_0, ..., x_{n-1}, s \in S$ hat.

Für die Zukunft ist von der Vergangenheit nur die Gegenwart relevant

Da die **Zustandsmenge** S abzählbar ist, werden wir

$$s_i \in S, i \in I, I \subset \mathbb{N} \text{ mit } i \in I, I \subset \mathbb{N}$$

identifizieren. Wir schreiben also $X_n = i$ anstatt $X_n = s_i$. Wir sagen dann, dass die Kette im Zustand i ist (anstatt im Zustand s_i).

2.1.2 Definiton: Eine Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt (zeitlich) **homogen**, falls

$$\mathbb{P}(X_n = j|X_{n-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)$$

für alle n, i, j gilt. Homogenität bedeutet also, dass der Zeitpunkt n für die Übergangswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_n = j|X_{n-1} = i)$ irrelevant ist

In diesem homogenen Fall definieren wir die $\#(S) \times \#(S)$ **Übergangsmatrix P** durch

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i).$$

Diese Übergangsmatrix hat u.U. unendlich viele Zeilen und Spalten.

Wir werden nur homogene Markov-Ketten betrach-

ten.

2.2 Übergangsdynamiken

2.2.1 Satz: Für die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette gilt:

i.) Für alle i, j gilt $p_{ij} \geq 0$.

ii.) Für alle i gilt $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$. Die Zeilensumme ist 1.

Man sagt manchmal, dass $\mathbf{P}$ eine stochastische Matrix ist. Das ist jedoch missverständlich, da die Einträge in der Matrix keineswegs stochastisch (Zufallsgrößen) sind.

2.2.2 Definition: Die **n-Schritt Übergangsmatrix** $\mathbf{P}(m, m+n) = (p_{ij}(m, m+n))$ einer homogenen Markov-Kette ist durch

$$p_{ij}(m, m+n) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

definiert.

Beachte, dass $p_{ij}(m, m+n)$ eine **bedingte** Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Wir werden sehen, dass wegen Homogenität der Zeitpunkt m für die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(m, m+n)$ irrelevant ist, so dass die Notation $p_{ij}(m, m+n) = p_{ij}^{(n)}$ gerechtfertigt ist (siehe unten).

Wir beachten ferner $\mathbf{P}(m, m+1) = \mathbf{P}$.

2.2.3 Satz: Für die Übergangsmatrizen einer homogenen Markov-Kette gelten die **Chapman-Kolmogorov Gleichungen**:

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_k p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r).$$

Also gilt

$$\mathbf{P}(m, m+n+r) = \mathbf{P}(m, m+n)\mathbf{P}(m+n, m+n+r)$$

und

$$\mathbf{P}(m, m+n) = \mathbf{P}^n.$$

Wir erhalten die Übergangsdynamiken also durch **einfaches Potenzieren der Übergangsmatrix**.

Die i-te Zeile von $\mathbf{P}^n$ enthält an der j-ten Stelle die (bedingte) Wahrscheinlichkeiten, dass die Kette ausgehend von i mach n Schritten im Zustand j ist.

2.2.4 Bemerkung: Wegen des vorhergehenden Satzes gilt also $\mathbf{P}(m, m+n) = \mathbf{P}^n = \mathbf{P}(0, n)$, d.h. die Matrix der n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(m, m+n)$ ist unabhängig von m. Deshalb ist die **Notation**

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ij}(m, m+n)$$

gerechtfertigt.

Wir definieren $p_{ii}^{(0)} := 1$, dann kann man einige Formeln einfacher angeben.

▶ Bisher haben wir *nur* Übergangswahrscheinlichkeiten (also bedingte Wahrscheinlichkeiten) betrachtet. *Natürlich* kann man auch Wahrscheinlichkeiten betrachten. Der folgende Satz betrachtet die Verteilung (die Wahrscheinlichkeiten) zum Zeitpunkt n angeben. Wir stellen uns vor, dass die Anfangsverteilung $\mathbb{P}(X_0 = i)$ gegeben ist und erhalten eine Formel für die Verteilung $\mathbb{P}(X_n = i)$ zum Zeitpunkt n

2.2.5 Satz: Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogenen Markov-Kette und $\boldsymbol{\pi}_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$. Dann gilt – wir fassen die $\boldsymbol{\pi}^{(k)}$ als **Zeilenvektoren** auf –

$$\boldsymbol{\pi}^{(m+n)} = \boldsymbol{\pi}^{(m)} \mathbf{P}^n$$

und insbesondere

$$(\mathbb{P}(X_n = i))_{i=1,\ldots,n}^T = \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \mathbf{P}^n.$$

Beachte, dass die Einträge in $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ **unbedingte Wahrscheinlichkeiten** für die Periode n sind.

2.3 Zustandseigenschaften

▶ In diesem Abschnitt führen wir Eigenschaften von Zuständen ein.

2.3.1 Definition: Ein Zustand i einer homogenen Markov-Kette heißt **rekurrent (wiederkehrend)**, falls

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \,|\, X_0 = i) = 1$$

bzw. äquivalent

$$\mathbb{P}(X_n \neq i \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \,|\, X_0 = i) > 0$$

Gilt hingegen $\mathbb{P}(X_n = i \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \,|\, X_0 = i) < 1$, so heißt i **transient (vorübergehend)**.

Rekurrent bedeutet: Für fast alle Pfade – d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1 – kann man einen Zeitpunkt n finden, zudem die Kette, die in i gestartet ist, zu i zurückkehrt. **Wenn wir einen Pfad zufällig ziehen, dann können wir praktisch sicher sein, dass eine Rückkehr in endlicher Zeit stattfindet.**

Transient bedeutet: Nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 zieht man einen Pfad, der in endlicher Zeit zu i zurückkehrt. $i \in S$ ist also transient, wenn $\mathbb{P}(X_n \neq i$ für alle $n \in \mathbb{N} \,|\, X_0 = i) > 0$.

2.3.2 Definition: i.) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette und für $i \in S$

$$T_i = \min\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

der zufällige Zeitpunkt zudem der Zustand erstmals gleich i ist. Wir definieren die **mittlere Rückkehrzeit**:

$$\mu_i = \mathbb{E}(T_i | X_0 = i) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}, & \text{falls } i \text{ rekurrent ist.} \\ \infty, & \text{falls } i \text{ transient ist.} \end{cases}$$

Dabei ist für $k \in \mathbb{N}$

$$f_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}(X_k = j, X_{k-1} \neq j, ..., X_1 \neq j | X_0 = i).$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand ausgehend von i erstmal nach n Schritten gleich j ist.

Warum ist $\mu_i = \infty$, wenn i transient ist. ......

ii.) Ist der Zustand i rekurrent aber (trotzdem) $\mu_i = \infty$, dann nennen wir i **null-rekurrent**. Gilt $\mu_i < \infty$, dann nennen wir

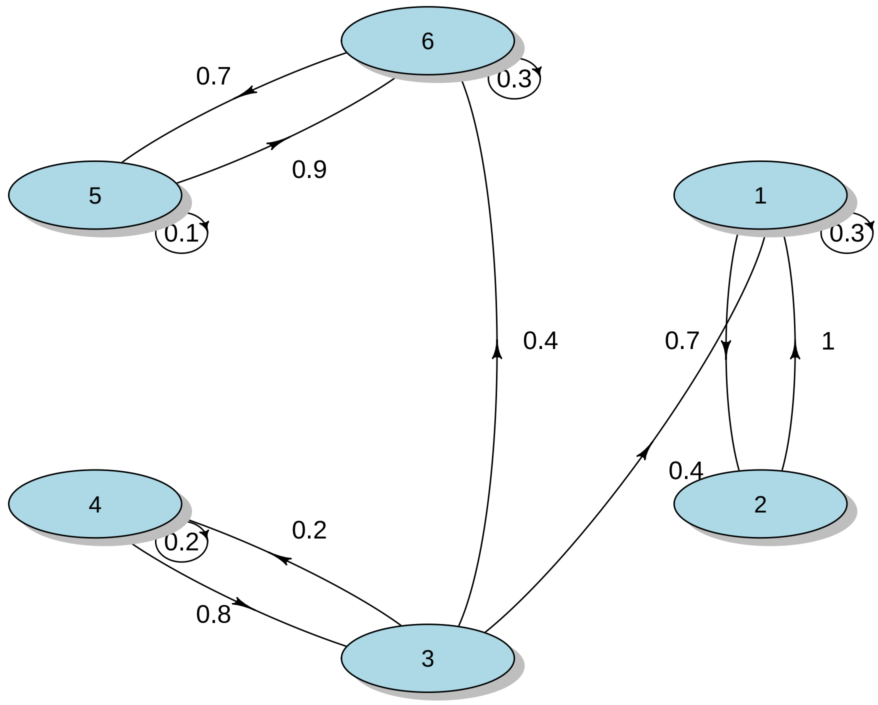

Abbildung 2.1: Es gilt $\mathbb{P}(X_1 = 6|X_0 = 3) = 0.4$. Einen Pfad der in 3 beginnt und dann in den Zustand 6 übergeht, erhalten wir mit Wahrscheinlichkeit 0.4. **Für diese Pfade** gibt es **kein** $n \in \mathbb{N}$, so dass die Kette in n zur 3 **zurückkehrt**. Der Zustand 3 ist also nicht rekurrent. Also ist der Zustand 3 transient. Es gilt aber auch nicht $\mathbb{P}(X_n = 3 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\,|X_0 = i) = 0$. Mit Wahrscheinlichkeit 0.2 wechselt die Kette in den Zustand 4. Mit Wahrscheinlichkeit 1 wechselt die Kette dann irgendwann in den Zustand 3 zurück (bitte vergewissern Sie sich davon). Es gilt sogar $\mathbb{P}(X_n = i \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\,|X_0 = 3) = 0.2$, denn auch bei einem Wechsel nach 1 gibt es keine Rückkehr zur 3.

i **positiv-rekurrent**.

iii.) Für einen Zustand i heißt $d(i) = \text{ggT}\{n : p_{ii}(n) > 0\}$ die **Periode** des von i.

d ist also genau dann die Periode von i, wenn: $p_{ii}(n) = 0$ außer für n, die Vielfaches von d sind und d ist die größte natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Also, wenn die Periode von i 2 ist, dann kehrt die Kette mit positiver Wahrscheinlichkeit nach 2,4,6, ... Schritten nah i zurück. Nach z.B. 3 Schritten mit Wahrscheinlichkeit 0.

i heißt **periodisch**, falls $d(i) > 1$ ist. i heißt **aperiodisch**, falls $d(i) = 1$.

Aperiodisch bedeutet: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq N$ gilt.[1] Wenn also N z.B. 100 ist, dann gilt $p_{ii}^{(100)} > 0$, $p_{ii}^{(101)} > 0$, $p_{ii}^{(102)} > 0$, ... Aperiodizität ist wichtig für die Langfrist-Analyse von Zuständen beziehungsweise Ketten, wie wir später sehen werden!

iv.) Ein Zustand heißt **ergodisch**, falls er positiv-rekurrent und aperiodisch ist.

Also: Wenn i ergodisch ist, dann ist i aperiodisch, die Kette kehrt sicher[2] zu i zurück und die Kette benötigt für die

[1] Der Beweis benötigt etwas Zahlentheorie ......

[2] bedeutet mit Wahrscheinlichkeit 1

Rückkehr im Durchschnitt nicht ewig.

v.) Ein Zustand i heißt **absorbierend**, falls $\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = i) = 1$.

2.3.3 Satz: Wir verwenden die folgenden Konzepte:

$$N_i = \#\{n \in \mathbb{N}_0 | X_n = i\}$$

bezeichnet die Anzahl der Besuche bei Zustand i einer Kette die in i beginnt und

$$T_i = \min\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

bezeichnet den Zeitpunkt des ersten Besuch des Zustands i.

i.) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a.) i ist **rekurrent**.

b.) $\mathbb{P}(T_i = \infty | X_0 = i) = 0$.

c.) $\mathbb{P}(N_i = \infty | X_0 = i) = 1$.

d.) $\sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty$.

ii.) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a.) i ist **transient**.

b.) $\mathbb{P}(T_i = \infty | X_0 = i) > 0$.

c.) $\mathbb{P}(N_i = \infty | X_0 = i) = 0$.

d.) $\sum_n p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Beweis: Billingsley [1, S. 118] für die Aussagen in c.) und d.), Grimmett und Stirzaker [5, S. 248]. Privault [14, Kapitel 6]

2.4 Klasseneigenschaften

▶ Äquivalenzklassen von Zuständen ......

2.4.1 Definition: Wir schreiben $i \to j$ und sagen j **ist aus** i **erreichbar**, falls es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$ gibt.

Wenn $i \to j$ und $j \to i$ gilt, dann schreiben wir $i \leftrightarrow j$. In diesem Fall sagen wir, dass i und j **kommunizieren**.

Bemerkung: Wegen $p_{ii}(0) = 1$ (gemäß Festsetzung) gilt $i \leftrightarrow i$ für alle i.

2.4.2 Satz: $i \leftrightarrow j$ definiert auf S eine Äquivalenzrelation. Es gilt also:

- Für alle $i \in S$ ist $\leftrightarrow j$.
- Gilt für $i, j \in S, i \leftrightarrow j$, dann gilt auch $j \leftrightarrow i$.

- Gilt für $i, j, k \in S, i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$, dann gilt auch $i \leftrightarrow k$.

Bemerkung: Auf Basis der Äquivalenzrelation $\leftrightarrow$ können wir **Äquivalenzklassen** definieren. Es sei $s \in S$ in Zustand, dann heißt

$$[s] = \{x \in S \,|\, x \leftrightarrow s\}$$

Äquivalenzklasse mit **Repräsentanten** s.

2.4.3 Satz: Für $i, j \in$ mit $i \leftrightarrow j$ gilt:

i.) i und j haben die gleiche Periode.

ii.) i ist genau dann transient, wenn j transient ist.

iii.) i ist genau dann null-rekurrent, wenn j null-rekurrent ist.

iv.) i ist genau dann positiv-rekurrent, wenn j positiv-rekurrent ist.

Bemerkung: Die vier Eigenschaften sind also **Klasseneigenschaften**: Gilt eine Eigenschaft für einen Zustand einer Klasse. dann gilt die Eigenschaft für alle Elemente der Klasse. Dementsprechend sprechen wir insbesondere von einer rekurrent Klasse bzw. von einer transienten Klasse.

2.4.4 Definition: i.) Eine Menge von Zuständen $M \subset S$

heißt

ia.) **abgeschlossen**, falls $p_{ij} = 0$ für alle $i \in M, j \notin M$.

ib.) **irreduzibel (oder kommunizierend)**, falls $i \leftrightarrow j$ für alle $i, j \in M$.

ii.) Eine Markov-Kette heißt **irreduzibel**, wenn sie nur aus einer einzigen $\leftrightarrow$-**Klasse** besteht.

2.4.5 Bemerkung: i.) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\sum_{j \in M} p_{ij} = 1$ für alle $i \in S$ gilt.

ii.) Wenn eine Kette eine Abgeschlossene Menge erreicht, dann verlässt ist die Kette diese Menge nicht mehr.

iii.) Wenn eine Menge von Zuständen irreduzible ist, dann kommunizieren gemäß Definition alle Elemente in dieser Menge miteinander. Wenn C nicht nur eine Menge, sondern sogar eine $\leftrightarrow$-**Klasse** ist, dann liegen in C **alle** Zustände, die miteinander kommunizieren. In diesem Sinn ist jede Klasse eine maximale irreduzible Menge.

2.4.6 Bemerkung: Wenn C eine rekurrente $\leftrightarrow$-Klasse ist, dann ist C abgeschlossen.

2.4.7 Satz: Der Zustandsraum einer homogenen Markow

Kette lässt sich eindeutig in der Form

$$S = T \uplus C_1 \uplus C_2 \uplus \dots$$

zerlegen. Dabei ist T die Menge der transienten Zustände der Kette und $C_1, C_2, \dots$ sind die abgeschlossenen[3] rekurrenten Klassen.

Beweis: Grimmett und Stirzaker [5, 251]

2.4.8 Bemerkung (Grimmett und Stirzaker [5, 252]): Wenn die Markov-Kette in C_j beginnt, dann bleibt die Kette für immer in dieser abgeschlossenen rekurrenten Klasse. Wenn die Kette in T beginnt, dann bleibt die Kette u.U. für immer in T oder sie wechselt in eine rekurrente Klasse und bleibt dann dort für immer. Für den Fall $\#(S) < \infty$ gilt: Wenn die Kette in T startet, dann wechselt die Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 in eine rekurrente Klasse.

[3] *abgeschlossenen* hätte man nicht angeben müssen, denn rekurrente Klassen sind abgeschlossen.

2.5 Stationäre Verteilung und Langfristverhalten

2.5.1 Definition: Ein **Zeilen**vektor $\boldsymbol{\pi}^*$ heißt **stationäre Verteilung** der homogenen Markov-Kette, falls

i.) $\pi_j^* \geq 0$ für alle j und $\sum_{j\in S} \pi_j^* = 1$.
ii.) $\boldsymbol{\pi}^* = \boldsymbol{\pi}^* \mathbf{P}$.

2.5.2 Bemerkung: $\boldsymbol{\pi}^*$ ist/heißt wegen ii.) der Definition ein **Links**eigenvektor der Matrix $\mathbf{P}$ zum Eigenwert 1. Deshalb heißt eine stationäre Verteilung stationäre Verteilung.

2.5.3 Bemerkung: Gilt $\mathbb{P}(X_0 = j) = \pi_j^*$, dann gilt auch $\mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j^*$ (für alle n).

2.5.4 Satz: i.) Eine irreduzible[4] homogene Markov-Kette hat genau dann eine stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}^*$, wenn **alle Zustände positiv rekurrent** sind.

ii.) In diesem Fall ist die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}^*$ eindeutig bestimmt und es gilt

$$\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}.$$

Dabei ist

$$\mu_i = \mathbb{E}(T_i | X_0 = i)$$

[4]Die Kette besteht aus nur einer $\leftrightarrow$ Klasse.

die erwartete Dauer bis zum nächsten ersten Besuch in i. .

Beweis: Grimmet und Stirzaker [5, S. 254]

2.5.5 Bemerkung (Grimmett & Stirzaker [5, 259]): Wir wollen das Grenzverhalten $p_{ij}(n)$ für $n \to \infty$ untersuchen. Wie das folgenden Beispiel belegt, führt Periodizität zu einer Komplikation.[5] Es sei $S = \{1, 2\}$ und

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann alterniert $p_{ii}(n)$. Das verkompliziert die Asymptotik.

2.5.6 Satz: Für die Zustände einer irreduziblen aperiodischen homogenen Markov-Kette gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

Hier muss man beachten, dass der Limes unabhängig von i ist.

Beweis: Grimmet und Stirzaker [5, S. 259]

2.5.7 Bemerkung: Wir betrachten eine irreduzible Markov-Kette, so dass wir den vorherigen Satz anwenden können. Die

[5] Diese Kette hat aber einer eine stationäre Verteilung.

Anfangsverteilung der Kette sei $\mathbb{P}(X_0 = i)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) p_{ij}^{(n)}.$$

Dann beobachten wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) p_{ij}^{(n)} &= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}\end{aligned}$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{\mu_j}$$

2.5.8 Bemerkung: i.) Wenn die irreduzible aperiodische Kette transient oder null-rekurrent ist, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

ii.) Wenn die irreduzible aperiodische Kette positiv-rekurrent ist, dann

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j^*.$$

$\boldsymbol{\pi}^*$ ist die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung.

iii.) Wenn die irreduzible Kette die Periode d hat, dann

$$p_{jj}^{(nd)} \to \frac{d}{\mu_j}.$$

► Man kann sogar den folgenden Satz beweisen, der auf die Voraussetzung der Irreduzibilität verzichtet.

2.5.9 Satz (Grimmet und Stirzaker [5, S. 262]): Für jeden aperiodischen Zustand j einer homogenen Markov-Kette gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$$

und für jeden Zustand i gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j},$$

2.5.10 Bemerkung: Die Gleichung $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}/\mu_j$ gilt auch für $i = j$. Wenn j persistent ist, dann ist $f_{jj} = 1$. Wenn $f_{jj} < 1$, dann ist j flüchtig. Dann folgt $\mu_j = \infty$.

2.5.11 Bemerkung: Für eine irreduzible aperiodische homogenen Markov-Kette gilt einer von drei Fälle:

1. Die Kette ist transient und $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.
2. Die Kette ist persistent – aber null-persistent –, es gibt keine stationäre Verteilung und $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.
3. Die Kette ist persistent, es gibt eine stationäre Verteilung und

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j^*.$$

2.6 Endliche Ketten

2.6.1 Definition: Eine Markov-Kette heißt **endlich**, falls $N = \#(S) < \infty$.

2.6.2 Satz: Eine endliche homogene Markov-Kette hat mindestens eine rekurrenten Klasse und alle rekurrente Zustände sind positiv-persistent.

2.6.3 Satz: Für die Übergangsmatrix **P** einer endlichen homogenen Markov-Kette gilt:

i.) $\lambda = 1$ ist Eigenwert von **P** zum Eigenvektor $(1, 1, ..., 1)^T$.
ii.) Für alle Eigenwerte von **P** gilt $|\lambda| \leq 1$.

2.6.4 Satz (Perron-Frobenius): Für die Übergangsmatrix **P** einer irreduziblen endlichen Markov-Kette mit Periode d gilt:

i.) Die Eigenwerte vom Betrag 1 sind: $\lambda_1 = \omega^0, \lambda_2 = \omega^1, ..., \lambda_d = \omega^{d-1}$, wobei $\omega = e^{2\pi i/d}$.
ii.) Für alle anderen Eigenwerte $\lambda_{d+1}, ..., \lambda_N$ gilt $|\lambda_i| < 1, i =$

$d+1, ..., N$.

Insbesondere: Im Falle der Aperiodizität $d = 1$ ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert mit Betrag 1. Alle anderen Eigenwerte haben einen Betrag strikt kleiner 1.

Beweis: Grimmett und Stirzaker [5, Seite 269]

2.6.5 Satz: i.) Die Anzahl der persistenten Klassen einer homogenen Markov-Kette entspricht der Vielfachheit ν_1 des Eigenwertes $\lambda_1 = 1$, wobei die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen. (Vgl. Karlin und Taylor [10, Seite 4])

ii.) Die Übergangsmatrix einer endlichen homogenen Markov-Kette kann durch die geeignete Wahl der Zustandsnummerierung in der Form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & ... & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & ... & P_{\nu_1} & 0 \\ Q_1 & Q_2 & ... & Q_{\nu_1} & Q \end{pmatrix}.$$

angegeben werden. Dabei korrespondieren die Zeilen mit den Matrizen $P_1, ..., P_{\nu_1}$ zu den persistenten Klassen und die Zeilen mit den Q-Matrizen zu den flüchtigen Zuständen.

Literaturverzeichnis

[1] Patrick **Billingsley**, 1995, Probability and Measure, 3th. AuflageWiley

[2] Robert **Dobrow**; 2016; Introduction to Stochastic Processes with R; Wiley; vgl. auch `https://github.com/raytroop/Stochastic-Processes-R`

[3] Rick **Durrett**; 2021; Probability – Theory and Examples; 5ed; Cambridge University Press

[4] William **Feller**; 1968; An Introduction to Probability – Theory and its Application; 3ed; Wiley.

[5] Geoffrey **Grimmett** und David **Strikzaker**; 2020; Probability and Random Processes, Fourth Edition, Oxford University Press

[6] Geoffrey **Grimmett** und David **Strikzaker**; 2020; One tousend exercises in probability, Third Edition, Oxford

University Press

[7] Norbert **Henze**; 2019; Stochastik – Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie, Springer

[8] Norbert **Henze**; 2024; Irrfahrten – Faszinationen der Faszination der Random Walks; 3. Auflage; Springer

[9] ...... **Karlin**, ... **Taylor**; A first course on stochastic processes;

[10] ...... **Karlin**, ... **Taylor**; A second course on stochastic processes;

[11] Fima **Klebaner**; 2012; Introduction to Stochastic Calculus; Third Edition; Imperial College Press

[12] Olga **Korosteleva**; 2022; Stochastic Processes in R; CRC Press; `https://github.com/socalrug/stochastic_processes_2023-02-11`

[13] Stephan **Norris**; 1998; Markov Chains; Cambridge University Press

[14] Nicolas **Privault**; 2018; Understanding Markov Chains; 2te Auflage; Springer

[15] Rene **Schilling**; 2018; Martingale und Prozesse; De Gruyter

[16] Rene **Schilling**; 2021; Browian Motion; De Gruyter

[17] Steven **Shreve**; 2004; Stochastic Calculus for Finance 2; Springer.

[18] Michael **Steele**; 2010; Stochastic Calculus and Financial Applications; Springer.

[19] Anders **Tolver**; An Introduction to Markov Chains; http://web.math.ku.dk/noter/filer/stoknoter.pdf.