Zinsen, Zinsstruktur und Zinsderivate

Manfred Jäger-Ambrożewicz
www.mathfred.de
9. Oktober 2025 17:05

Inhaltsverzeichnis

1 Zinsen & Zinsprodukte

1.1 Geld und Zinsen

1.1.1 Bemerkung: i.) **Zinsen** erhält man für die **Zahlungsmittelüberlassung**. Man überlässt Zahlungsmittel (Geld) anderen und wird dafür *entschädigt*.[1] Das gilt auch in die andere Richtung: Wenn man einen Kredit aufnimmt und Zahlungsmittel zur sofortigen Verwendung erhält, so muss man für diese *Ungeduld* (typischerweise später) Zinsen zahlen.

Das ist z.B. so, wenn Unternehmen (oder der Staat) eine Sachinvestition (wie die Anschaffung einer Maschine) finanzieren will.

ii.) Bei einer Zahlungsmittelüberlassung gibt es zwei **Kontrahenten**. Für den einen Kontrahenten stellt die Zahlungsmittelüberlassung **eine Anlageform** dar (die Kontrahentin möchte möglichst hohe Zinsen bekommen, d.h. sehr gut entschädigen werden), für den anderen eine **Finanzierungsform** (der Kontrahent möchte möglichst geringe Zinsen, d.h. eine preiswerte Finanzierung bekommen).

1.1.2 Beispiel: i.) Ein reicher Onkel überlässt (leiht) seinem Neffen €1000 (der sich davon einen neues Fahrrad kaufen will). Der Neffe verspricht, dass er in einem Jahr €1050 zurück zahlt. Die Zinsen betragen

[1] Einen *Euro heute* zu haben ist *normalerweise* besser, als einen *Euro in einem Monat* zu haben. Zinsen sind *normalerweise also* positiv. Normal geht es aber nicht immer zu!

Euro €50 also 5 Prozent der Kreditsumme.

ii.) Ein Ruheständler hat €35000 auf einem Festgeldkonto mit einer Laufzeit von einem Jahr angelegt. An Ende des Jahres erhält er eine Zinsgutschrift von €1050; das sind 3% von €35000. Wenn der Ruheständler die Zinsgutschrift auf dem Festgeldkonto belässt, dann steigt der Kontostand auf €36050.

Bilanz UniCredit (in Millionen)

Aktiva		**Passiva**	
Einlagen bei der EZB und Bargeld	101707 €	Verbindlichk: gg ZB	31167 €
Financial Asset held for trading	72705 €	Einlagen von Banken	172473 €
Kredit u: Forderungen gg Banken	117489 €	Einlagen von Kunden	500750 €
Kredit u: Forderungen gg Kunden	506012 €	Andere Verbindlichk:	139210 €
Andere Assets	133354 €	Nettovermögen	87856 €
Summe Aktiva	**931456 €**	**Summe Passiva**	**931456 €**

Bilanz Eurosystems

Aktiva		**Passiva**	
Ausländische Assets	859963 €	Bargeld im Umlauf	1292742 €
Kredite an Geschäftsb:	643081 €	Einlagen v: Geschäftsbanken	1946252 €
Wertpapiere	2847102 €	Einlagen von Regierungen	178894 €
Andere Assets	321279 €	Andere Verbindlichkeiten	679387 €
		Netto Vermögen	574150 €
Summe Aktiva	**4671425 €**	**Summe Passiva**	**4671425 €**

1.1.3 Bemerkung: i.) Da Zinsen im Zusammenhang mit der **Zahlungsmittel**überlassung entstehen, muss man sich mit **Geld** beschäftigen; insbesondere mit der sogenannten **Geldpolitik**: **Zentralbanken**

steuern den sehr kurzfristigen Zins.[2] Wer sich mit Zinsprodukten praktisch beschäftigt, verfolgt typischerweise die Entscheidungen der Zentralbanken und insbesondere die entsprechenden Pressekonferenzen.[3]

ii.) **Geld** ist das *Medium* mit dem wir Güter und Dienstleistungen bezahlen. Wir bezahlen in der Regel nicht mit Waren oder Dienstleistungen, sondern mit Geld, denn das ist viel *bequemer*. Eine Zentralbank kontrolliert **das Geldsystem**; insbesondere die **Geldmenge** und bestimmte Zinsensätze. Das geschieht durch die Steuerung der **Zinssätze** auf dem sogenannten **Geldmarkt**. Diesen Zusammenhang muss man also beachten, wenn man Zinssätze verstehen will.

Wenn man Geldpolitik verstehen will, dann muss man das **Mandat/Ziel der Zentralbank** kennen. Das können wir hier nicht ausführlich erläutern. Also nur kurz: Was ist das Ziel der Zentralbank: Kontrolle der Inflation. Das funktioniert (hoffentlich) über den sogenannten Transmissionsmechanismus der Geldpolitik. Dieser beginnt auf dem Geldmarkt; insbesondere mit den Zinssätzen auf dem Geldmarkt. Um verstehen, wie sich sich diese Zinssätze bilden, müssen wir einige Details des Geldsystems ansehen.

Wir messen die Geldmenge (vgl. Burda und Wyplosz (......)):[4]

$$\text{Geldmenge (M0)} = \text{Bargeld (B)} + \text{Einlagen bei ZB (R)}$$
$$M0 = 1325,3 + 1923,9 = 3248.9$$
$$\text{Geldmenge (M1)} = \text{Bargeld (B)} + \text{Einlagen bei Geschäftsbanken (D)}$$
$$M1 = 1325,3 + 7619,1 = 8944,2$$

Für uns wichtig sind die Einlagen und insbesondere die Variation der

[2] Hier finden Sie eine ausführliche Darstellung: https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/monetarypolicy2011en.pdf, https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/monetarypolicy2011de.pdf, https://www.bundesbank.de/de/publikationen/schule-und-bildung/geld-und-geldpolitik-606038 und https://www.ecb.europa.eu/mopo/html/index.en.html

[3] Für die Fed: https://www.federalreserve.gov/videos.htm Für die ECB: https://www.ecb.europa.eu/press/tvservices/webcast/html/index.en.html

[4] Es gibt andere Geldmengenkonzepte.

Einlagen. Wie entstehen (neue) Einlagen bei Geschäftsbanken? Kredite von Geschäftsbanken an Kunden! Geht das grenzenlos? Nein, die Banken benötigen Einlagen bei der ZB. Hier ist ein Anknüpfungspunkt für die ZB. Wir schauen uns die Details an.[5] Wie entsteht also weiteres Geld? Die A-Bank vergibt einen Kredit in Höhe von 10000 € an Herrn Meier. Direkt nach der Kreditgewährung hat Herr Meier um 10000 höhere Sichteinlagen bei der A-Bank. Herr Meier überweist die 10000 an den Bauunternehmer Schuster, der sein Konto bei der B-Bank hat. Jetzt hat der Bauunternehmer um 10000 höhere Sichteinlagen (und Herr Meier eine neue Garage). Die B-Bank hat im Zusammenhang mit der Überweisung auf ihrem Konto bei der Zentralbank 10000 Einlagen von der A-Bank erhalten. Die Einlagen der B-Bank bei der ZB sind also um 10000 höher. Die Einlagen der A-Bank bei der Zentralbank sind um 10000 geringer; in der Tat um 10000 **zu gering** (nach der Überweisung an die B-Bank sind die Kundeneinlagen unverändert, aber die Einlagen der A-Bank bei der ZB geringer). Die A-Bank benötigt Zentralbankgeld. Die A-Bank leiht sich ZB-Einlagen z.B. von der B-Bank in Höhe von 9000 €. Die restliche 1000 € leiht sich die A-Bank direkt von der ZB. Der Kredit der B-Bank an die A-Bank und der Kredit der ZB an die A-Bank sind Geldmarktgeschäft zu einem Geldmarktzinssatz. Die Zentralbank steuert diesen Zins. Damit beeinflusst die ZB letztlich die Refinanzierung des Kredites A-Bank an Herrn Müller. Genau das ist Hebel: Die Zentralbank beeinflusst die Kreditschöpfung und damit die kreditfinanzierte Nachfrage nach Gütern und Dienstleistung. So beeinflusst sie die Inflation.

1.1.4 Aufgabe 1.1: Nutzen sie die folgenden Bilanzen, um die oben beschrieben Vorgänge bilanziell abzubilden.

[5] Vgl. auch den Beitrag `https://www.bundesbank.de/resource/blob/614448/c0acb63e33120467bbb3615c63dc7e1a/mL/2017-04-geldschoepfungsprozess-data.pdf`

Bilanz einer typischen Geschäftsbank (A-Bank)

Aktiva		**Passiva**	
Einlagen bei der ZB und Bargeld	..... €	Verbindlichkeiten gg ZB	...... €
Kredite an Kunden	...... €	Kundeneinlagen	...... €
Wertpapiere	...... €	Verbindlichkeiten	...... €
		Eigenkapital	...... €
Summe Aktiva	**...... €**	**Summe Passiva**	**...... €**

Bilanz einer typischen Geschäftsbank (B-Bank)

Aktiva		**Passiva**	
Einlagen bei der ZB und Bargeld	..... €	Verbindlichkeiten gg ZB	...... €
Kredite an Kunden	...... €	Kundeneinlagen	...... €
Wertpapiere	...... €	Verbindlichkeiten	...... €
		Eigenkapital	...... €
Summe Aktiva	**...... €**	**Summe Passiva**	**...... €**

Zentralbankbilanz (Bank der Banken)

Aktiva		**Passiva**	
Foreign Assets	..... €	Bargeld im Umlauf	...... €
Kredite an Geschäftsbanken	...... €	Einlagen v Geschäftsbanken	...... €
Wertpapiere	...... €	Einlagen des Staats	...... €
		Eigenkapital	...... €
Summe Aktiva	**...... €**	**Summe Passiva**	**...... €**

1.1.5 Bemerkung: Daten zu Geldmarktzinssätzn und zu Zinssätzen bzw. zu Preisen deutscher Staatsanleihen gibt es insbesondere auf den Internetseiten dr deutschen Banken.

https://www.bundesbank.de/de/statistiken/geld-und-kapitalmaerkte
Dort dann auf Geldmarktsätze und Zinsstruktur am Rentenmarkt.

https://www.bundesbank.de/de/statistiken/zeitreihen-datenbanken
Dort dann auf Geld und Kapitalmärkte. Dann Zinssätze und Renditen. Dann Geldmarktsätze oder Kurse und Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere (nach ISIN) oder Zinsstruktur am Rentenmarkt - Schätzwerte

1.1.6 Bemerkung: i.) Staaten finanzieren den Teil der Staatsausgaben, den sie nicht über Steuern finanzieren, auf dem Wege der Emission von Anleihen.[6] Unternehmen nutzen ebenfalls Anleihen zur Finanzierung. Ein Haushalt nimmt einen Kredite auf, um beispielsweise den Erwerb einer Immobilie zu finanzieren. Es gibt Haushalte und Unternehmen, die – gegebenenfalls nur temporär – über einen Zahlungsmittelüberschuss verfügen. Diese überlassen Zahlungsmittel, gegen das Versprechen der zukünftigen Rückzahlung inklusive Zinsen.

ii.) Bei Finanzierungsformen/Anlageformen mit Zinsen handelt es sich generisch[7] um festverzinsliche Finanzierungsformen. Der Gläubiger erhält pro Zinsperiode eine fixe Zahlung (bei Anleihen den sogenannten Kupon). Eine Aktie ist eine Finanzierungsform/Anlageform mit inhärent variablen Zahlungen (Dividenden). Zudem haben Finanzierungsformen mit Zinsen typischerweise eine Endfälligkeit.

v.) Anleihen und Kredite stellen die generischen festverzinslichen Finanzierungsformen dar. Anleihen sind verbrieft und werden als Wertpapiere an Börsen gehandelt; das haben Anleihen mit Aktien gemeinsam. Kredite werden typischerweise von Banken gewährt und bleiben (generisch) auf der Bilanz der Bank (und werden später verbrieft).

iii.) Anleihen und Aktien werden in der Regel an Börsen gehandelt. Der

[6] In Deutschland ist die Finanzagentur für die Umsetzung zuständig: https://www.deutsche-finanzagentur.de/de/institutionelle-investoren/

[7] Grundsätzlich, also sind Ausnahmen möglich.

Preis ist riskant. Trotz der fixen Kuponzahlungen und der zugesagten Rückzahlung bei Endfälligkeit sind Anleihen also nicht risikolos.

iv.) In besonders *transparenter* Form liegt die Zahlungsmittelüberlassung bei einer sogenannten Nullkuponanleihe vor. **Wir werden Nullkuponanleihen als Grundbaustein des Gebäudes der Zinsprodukte ansehen.**

1.2 Nullkuponanleihen (NKA) und zero yields (NKA-Zinssaätze)

1.2.1 Notation und Konventionen: $t < T$ bezeichnen Zeit**punkte** (z.B. 10. August 2006 und 8 Februar 2007). τ bezeichnet stets **Zeitspannen** (z.B. 1/2 Jahr). Zeit messen wir in **Jahren**.

Eine Zeitspanne stellt im Vergleich zu zwei Zeitpunkten einen Informationsverlust dar, denn an der Zahl τ kann man den Beginn der Spanne und da Ende nicht ablesen.

1.2.2 Definition: Eine **Nullkuponanleihe (NKA)** mit Fälligkeit T verbrieft den Anspruch auf einen Euro (oder 100 Euro) in T, d.h. der Inhaber erhält €1 (oder 100 €) in T. Mit $Z(t,T) > 0$ bezeichnen wir den **Preis einer Nullkuponanleihe** zum Zeitpunkt t. Die folgende Tabelle stellt die Zahlungen (Zugang aus Sicht des Investor) mit den Zahlungszeitpunkten dar.

Zeitpunkt	t	T
Zahlung	$-Z(t,T)$	1

Man kann sich eine NKA auch als durch die folgende Matrix charakterisiert ansehen:

$$\begin{pmatrix} t & T \\ -Z(t,T) & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich ist auch die Zeitschiene aufschlussreich:

Zeitschiene

$$\begin{array}{cc} t & T \\ -Z(t,T) & 1 \end{array}$$

Den **NKA-Zins** die (**zero rate** oder der **zero yield**) bei **stetiger Aufzinsung** definieren wir durch

$$\begin{aligned} z(t,T) &= -\frac{\ln(Z(t,T))}{T-t} \text{ also} \\ Z(t,T) &= e^{-z(t,T)(T-t)} \text{ bzw.} \\ e^{z(t,T)(T-t)} Z(t,T) &= 1, \end{aligned}$$

wobei wir $Z(t,T) > 0$ beachten.

Wir stellen zero yields regelmäßig als Funktionen der Restlaufzeit dar. Mit Restlaufzeit $\tau = T - t$ erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned} z(t,t+\tau) &= -\frac{1}{\tau} \ln Z(t,t+\tau) \\ Z(t,t+\tau) &= e^{-z(t,t+\tau)\tau}. \end{aligned}$$

$Z(t,t+\tau)$ ist also der Preis in t einer Nullkuponanleihe mit Restlaufzeit τ.

Wir definieren die **Short Rate** r_t als Limes:

$$r_t := r(t) := -\lim_{\tau\to 0} \frac{\ln Z(t,t+\tau)}{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z(t,T) \right)_{|T=t}$$

Für die mathematische Analyse eignet sich besonders die eben eingeführte sogenannte **stetige Aufzinsung**. In der Praxis werden regelmäßige diskrete Verzinsungen verwendet.

Bei **diskreter Darstellung der Verzinsung** mit **jährlicher Aufzinsung**:

$$\begin{aligned} z_1(t,T) &= \left(\frac{1}{Z(t,T)^{\frac{1}{(T-t)}}} - 1\right) \\ Z(t,T) &= \frac{1}{(1+z_1(t,T))^{(T-t)}} \\ (1+z_1(t,T))^{(T-t)} Z(t,T) &= 1. \end{aligned}$$

Bei **diskreter Darstellung der Verzinsung** mit **halbjährlicher Aufzinsung**:

$$\begin{aligned} z_2(t,T) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{Z(t,T)^{\frac{1}{2\cdot(T-t)}}} - 1\right) \\ Z(t,T) &= \frac{1}{\left(1+\frac{z_2(t,T)}{2}\right)^{2\cdot(T-t)}} \\ \left(1+\frac{z_2(t,T)}{2}\right)^{2\cdot(T-t)} Z(t,T) &= 1 \end{aligned}$$

Man sagt, dass z_2 ein sogenannter **nominell annualisierter Jahreszinssatz** und $z_2/2$ ein Halbjahreszinssatz ist. z_2 ist der annualisierte Wert von $z_2/2$. Die Annualisieurung erleichtert die Vergleichbarkeit von festverzinslichen Finanzprodukten.

Nochmal zur Übersicht die verschiedenen (Ab-)Aufzinsungen für $T-t =$

1:

$$
\begin{aligned}
Z(t,t+1) &= \frac{1}{(1+z_1(t,t+1))} \\
Z(t,t+1) &= \frac{1}{\left(1+\frac{z_2(t,t+1)}{2}\right)^2} \\
Z(t,t+1) &= e^{-z(t,t+1)}
\end{aligned}
$$

1.2.3 Beispiel: Angenommen wir betrachten in t eine Nullkopunanleihe, die in genau einem Jahr fällig wird, und in t für €0.9512294 gehandelt wird. Bei stetiger Verzinsung ist der zero yield genau 5%.[8] Das bedeutet jedoch nicht, dass tatsächlich und kontinuierlich kleine Zinsgutschriften erfolgen, die nach einem Jahr kumuliert 5% ergeben.

Wenn man die Verzinsung mit jährlicher Aufzinsung darstellt, dann ist $z_1 = 5.1271\%$ und mit halbjährlicher Aufzinsung $z_2 = 5.063027\%$ (beachte dass z_2 ein (nomineller) Jahreszinssatz ist). Auch wenn man die Verzinsung mittels z_2 angibt, dann bedeutet das jedoch i.A., dass man tatsächlich nach einem halben Jahr eine Zinsgutschrift erhält.

Diese drei Zinssätze stellen alle **den gleichen Sachverhalt dar**: In $t = 0$ verzichet man auf € 0.9512294 und erhält € 1 in $t = 1$. Welche Darstellung besser ist, hängt vom Zusammenhang (was man vergleichen will) ab. In den USA werden Kupons staatlicher Anleihen zweimal jährlich ausgezahlt. In diesem Zusammenhang ist es unter Umständen nützlich Verzinsung mit halbjährlicher Aufzinsung anzugeben. Die folgenden beiden Bewertungsgleichungen sind bei halbjährlicher Aufzinsung **beide** gut lesbar:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{c/2}{1+\frac{z_2\left(t,t+\frac{1}{2}\right)}{2}} + \frac{c/2+1}{\left(1+\frac{z_2(t,t+1)}{2}\right)^2} \\
P_2 &= \frac{c+1}{\left(1+\frac{z_2(t,t+1)}{2}\right)^2}
\end{aligned}
$$

[8] `exp(-0.05) = 0.9512294`

Bei jährlicher Aufzinsung hingegen sieht die erste Bewertungsgleichung *etwas* unübersichtlicher aus:

$$P_1 = \frac{c/2}{\left(1 + z_1\left(t, t+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c/2+1}{1+z_1\left(t,t+1\right)}$$
$$P_2 = \frac{c+1}{1+z_1(t,t+1)}$$

1.2.4 Bemerkungen: Die folgenden Formel erlauben die Umrechnung von stetig zu diskret bzw. von diskret zu stetig. Der Nachweis ist eine Übung.

$$z(t,T) = \ln(1 + z_1(t,T))$$
$$z(t,T) = 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{z_2(t,T)}{2}\right)$$

$$z_1(t,T) = e^{z(t,T)} - 1$$
$$z_1(t,T) = \left(1 + \frac{z_2(t,T)}{2}\right)^2 - 1$$

$$z_2(t,T) = 2 \cdot (e^{\frac{z(t,T)}{2}} - 1)$$
$$z_2(t,T) = 2 \cdot ((1 + z_1(t,T))^{\frac{1}{2}} - 1)$$

1.2.5 Definiton: Die **lineare Aufzinsung** zwischen t und T ist durch

$$z^l(t,T) = \frac{1 - Z(t,T)}{(T-t)Z(t,T)}$$

definiert. Dann gilt

$$Z(t,T) = \frac{1}{1 + (T-t)z^l(t,T)}$$
$$= \frac{1}{1 + \tau z^l(t,\tau)}$$

Diese Form die Verzinsung zu messen bzw. anzugeben wird nur für $\tau \leq 1$ (auch) verwendet.

1.3 Zinsstruktur

1.3.1 Definition (Zinsstruktur): Es sei $z(t, t+\tau), \tau \geq 0$ die Rendite der NKA zum Zeitpunkt t mit Restlaufzeit τ (also mit Fälligkeit $T = t + \tau$). Die Abbildung $z(t, t + \circ) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \tau \mapsto z(t, t + \tau)$ heißt **Zinsstruktur** zum Zeitpunkt t.

1.3.2 Definition: Gegeben sei die Zinsstruktur $z(t, t + \tau_k), \tau_k = k \cdot {}^1\!/_m, k = 1, ..., N$ und $Z(t, t + \tau_k) = e^{-z(t,t+\tau_k)\cdot\tau_k}$. Die **Par Rate** für $k = 1, ..., N$ ist die Lösung c_{τ_k} der Gleichung

$$1 = \frac{c_{\tau_k}}{m} \cdot Z(t, t + \tau_1) + ... + \frac{c_{\tau_k}}{m} \cdot Z(t, t + \tau_k) + Z(t, t + \tau_k).$$

Diese Gleichung kann man nach c_{τ_k} umstellen und erhält

$$c_{\tau_k} = m \cdot \frac{1 - Z(t, t + \tau_k)}{\sum_{j=1}^{k} Z(t, t + \tau_j)}.$$

1.3.3 Bemerkung: Die Par Rate ist die Kuponrate, die zur Paribewertung der entsprechenden Kuponanleihe führt, d.h. der faire Preis entspricht dem Nennwert 1 (oder 100).

1.3.4 Bemerkung: Wenn die Par Raten bekannt sind, dann kann man die dazu passende Zinsstruktur ermitteln:

$$
\begin{aligned}
Z(t,T_1) &= \frac{1}{1+{}^{c_{\tau_1}}\!/_m} \\
Z(t,T_2) &= \frac{1-{}^{c_{\tau_2}}\!/_m \cdot Z(t,T_1)}{1+{}^{c_{\tau_2}}\!/_m} \\
&\vdots \\
Z(t,T_K) &= \frac{1-{}^{c_{\tau_K}}\!/_m \cdot \sum_{k=1}^{K-1} Z(t,T_k)}{1+{}^{c_{\tau_K}}\!/_m}.
\end{aligned}
$$

Also kann man die Zinsstruktur auch mittels der par Raten angeben. Man spricht dann auch von par-Kurven.

Par-Raten sind nicht so *flexibel* wie zero yields. Par-Raten beziehen sich auf eine Periodisierung Δ. Man spezifiziert $c_{\tau_k} = c(t, t+\tau_k)$ für $\tau_k = k \cdot {}^1\!/_m, k = 1, ..., N$ auf einem Gitter. Zero yields werden für alle $T \geq$ modelliert.

1.4 Hauptkomponentenanalyse

In diesem Exkurs beschäftigen wir uns kurz mit der sogenannten **Hauptkomponentenanalyse**. Die Anwendung dieser Methode auf Zero Rates ist berühmt, in der Tat auch sehr erfolgreich und aufschlussreich. Auf Basis einer entsprechenden Analyse kommt man zu der Einschätzung, dass es **drei Faktoren** ausreichen, um die Zinsstruktur im Wesentlichen zu *erfassen.*

Es sei $\mathbf{y}$ ein Zufallsvektor der Dimension M mit $\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}$ und $\mathbb{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{\Sigma}$, wobei wir annehmen, dass $\mathbf{\Sigma}$ positiv definit ist. Dann gibt es – gemäß des **Spektralzerlegungssatzes** aus der Linearen Algebra (vgl. Strang [15, S. 246]) – die folgende Faktorisierung der Varianz-Kovarianz-Matrix:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^T.$$

Dabei ist $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_M) > 0$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von $\mathbf{\Sigma}$ auf der Diagonalen; alle Eigenwerte sind reell. O.E.d.A sind die Eigenwerte der Größe nach geordnet, d.h. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_M > 0$. Die Spalten von $\mathbf{L}$ sind die normierten orthogonalen Eigenvektoren von $\mathbf{\Sigma}$. Es gilt also $\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^{M\times M}}, \mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$. Die Spalten $L_{\bullet,j}, j = 1, ..., M$ von $\mathbf{L}$ heißen in diesem Zusammenhang **Ladungen**.[9]

Wir definieren die **Hauptkomponenten** als Transformation der Zufallsvariable $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{L}^T(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}).$$

Also gilt

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{f}.$$

Wir können also den Zufallsvektor als Linearkombination der Ladungen $L_{\bullet,1}, ..., L_{\bullet,M}$ mit den Faktoren $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_M)^T$ als Koeffizienten schreiben.

Dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}, \text{cov}(\mathbf{f}) = \mathbf{\Lambda}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{f}) &= ... \\
\mathbb{V}(\mathbf{f}) &= \mathbb{V}(\mathbf{L}^T(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})) \\
&= \mathbf{L}^T\mathbb{V}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{L} && \text{Sandwich Formel} \\
&= \mathbf{L}^T\mathbb{V}(\mathbf{y})\mathbf{L} \\
&= \mathbf{L}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda}.
\end{aligned}$$

[9]Die Ladungen sind nicht eindeutig bestimmt! Insbesondere bei der Interpretation der Ladungen ist es regelmäßig günstig z.B. einen Vorzeichenwechsel vorzunehmen.

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M} \mathbb{V}(f_j) &= \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \\ &= \operatorname{Spur}(\boldsymbol{\Sigma}) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \mathbb{V}(y_j).\end{aligned}$$

Das zweite Gleichung ist ein allgemeines Ergebnis der Linearen Algebra (siehe z.B. Meckes & Meckes [11, S. 362], Meyer [10, S. 494] oder Garcia & Horn [8, S. 206]).

Wenn wir die Summe der Varianzen $\sum_{j=1}^{N} \mathbb{V}(y_j)$ als **Maß für die Volatilität der Zinsstruktur im Ganzen** interpretieren, dann ist

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{M} \lambda_j} = \gamma_k$$

ein **Maß für den Anteil der Volatilität der durch die ersten** k **Komponenten** erfasst wird.

Auf Basis der Hauptkomponentenanalyse (Transformation) kann eine *niedrig-dimensionale* **affine Approximation der Zinsstruktur** berechnet werden. Es seien $\mathbf{f}_{[1,..,k]}$ die ersten k Hauptkomponenten (das ist ein Zufallsvektor der Dimension k, nämlich die ersten k Zeilen des Zufallsvektors $\mathbf{f}$) und $\mathbf{L}_{\bullet,[1,..,k]}$ die ersten k Ladungen (d.h. die ersten k Spalten der Matrix $\mathbf{L}$). Analog, seien $\mathbf{f}_{[k+1,..,M]}$ die Hauptkomponenten $k+1,...,M$ und $\mathbf{L}_{\bullet,[k+1,..,M]}$ die dazugehörigen Ladungen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\,\mathbf{f} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}_{\bullet,[1,..,k]}\,\mathbf{f}_{[1,..,k]} + \mathbf{L}_{\bullet,[k+1,..,M]}\,\mathbf{f}_{[k+1,..,M]} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}_{\bullet,[1,..,k]}\,\mathbf{f}_{[1,..,k]} + \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Von der zweiten Zeile sollte man sich überzeugen. Normalerweise berechnet man das Produkt einer Matrix mit einem Vektor so: (ganze) Zeile mal (ganze) Spalte.

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \sum_{j=1}^{M} \mathbf{L}_{i,j}\,\mathbf{f}_j$$

Das zweite Gleichheitszeichen beruht auf einer Aufteilung der Zeilen (jeder) und des Vektors in die Komponenten 1 bis k bzw. die Komponenten $k+1$ bis M:

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{L}_{i,j}\,\mathbf{f}_j + \sum_{j=k+1}^{M} \mathbf{L}_{i,j}\,\mathbf{f}_j.$$

Die Zero Rates mit Restlaufzeit τ sind approximativ

$$y_{\tau_j} = \mu_j + \mathbf{L}_{j,[1,..,k]}\,\mathbf{f}_{[1,..,k]} + e_j.$$

Wir bemerken noch, dass für $i \neq j$ die Zufallsvariablen e_i und e_j i.A. **nicht unkorreliert** sind.[10]

► Angenommen ihre statistische Analyse hat die folgenden Schätzungen geliefert:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.03 \\ 0.035 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 & 0.20 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 \\ 0.20 & 0.25 & 0.35 \end{pmatrix}$$

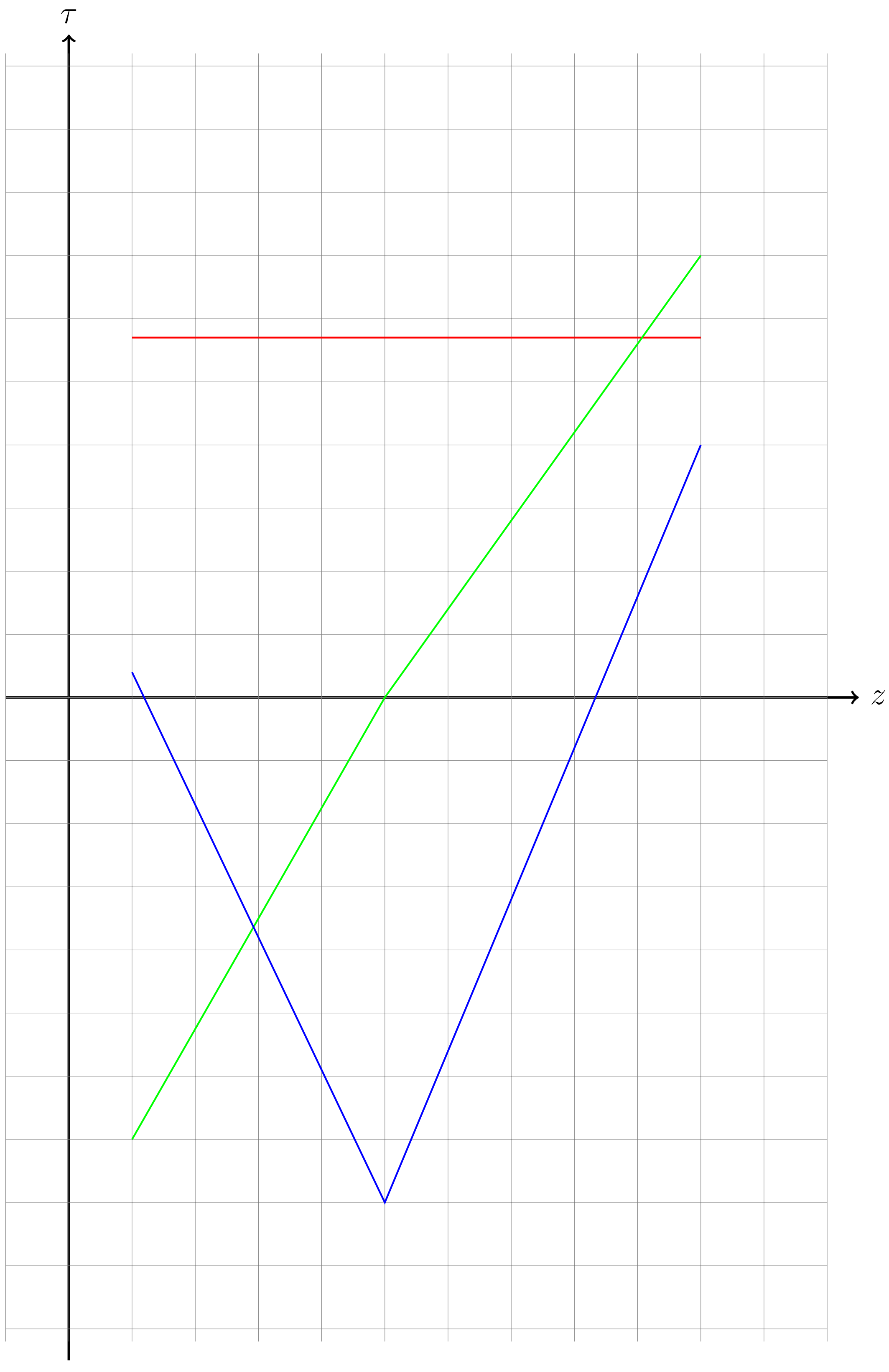
Mit R ermitteln wir die Eigenwerte und Eigenvektoren

```
> Sigma <- c(0.35, 0.25, 0.20, 0.25, 0.30,
0.25,0.20, 0.25, 0.35)
> Sigma <- matrix(Sigma,nrow = 3, byrow = TRUE)
> Sigma
 [,1] [,2] [,3]
```

[10]Durch die Hauptkomponentenanalyse erhält also kein korrekt spezifiziertes Faktormodell.

```
[1,] 0.35 0.25 0.20
[2,] 0.25 0.30 0.25
[3,] 0.20 0.25 0.35
> aux <- eigen(Sigma)
> Lad <- aux$vectors
> Lad
[,1]       [,2]       [,3]
[1,] 0.5773503 -0.7071068  0.4082483
[2,] 0.5773503  0.0000000 -0.8164966
[3,] 0.5773503  0.7071068  0.4082483
> lam <- aux$values
> lam
[1] 0.80 0.15 0.05
```

Die Ladungen kann man so grafisch darstellen; wobei wir $\tau = 1, 5, 10$ annehmen.



Der (nicht angegebene) Datensatz hat die Dimension 3; die Zinsen seien für $\tau = 1, 5, 10$. Die obige Analyse in R hat ergeben, dass wir 95 Prozent der Variation der Zinsen mit den **ersten beiden** Faktoren erfassen kann. Mit den drei Ladungen kann man die drei Zinsen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ exakt erfassen:[11]

$$\mathbf{y} = f_1\mathbf{L}_1 + f_2\mathbf{L}_2 + f_3\mathbf{L}_3$$

Mit den ersten beiden Ladungen (rot und grün) kann die Zinsen ziemlich gut erfassen:

$$\mathbf{y} \approx f_1\mathbf{L}_1 + f_2\mathbf{L}_2$$

Exkurs zum Exkurs: Singulärwertzerlegung

Singulärwertzerlegung: Für jede $m \times T$ Matrix[12] $\mathbf{Y}$ gibt es eine orthonormale Basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ von $\mathbb{R}^n$, eine orthonormale Basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ von $\mathbb{R}^m$ und positive Skalare $s_1 \geq ... \geq s_r > 0$ mit

$$\mathbf{Y}\mathbf{v}_j = s_j\mathbf{u}_j \quad 0 \leq j \leq r$$

wobei $r = \text{Rang}(\mathbf{Y})$.

Fasst man die Vektoren in Matrizen zusammen, dann erhält man

$$\mathbf{YV} = \mathbf{US}$$

bzw.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{USV}^{-1} = \mathbf{USV}^T.$$

Für die Lineare Algebra ist die Singularwertzerlegung von fundamentaler Bedeutung, da man auf dieser Grundlage besonderes günstige Basen der vier fundamentalen Unterräume zu einer Matrix findet (Strang nennt

[11] In der Terminologie der Linearen Algebra: Wir wechseln von der Standardbasis zu der Basis $L_i, i = 1, 2, 3$.

[12] Vorsicht, jetzt ist die betrachtete Matrix $\mathbf{Y}$ die Matrix der Daten und nicht der Vektor der Zufallsvariablen! m ist (in unserem Modul) die Anzahl der Zero Yields und T ist die Anzahl der erfassten Perioden (Länge der Zeitreihe).

dieses Resultat *The Fundamental Theorem of Linear Algebra*).

Als äußeres Produkt erhalten wir

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{r} s_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T.$$

An der letzten Darstellung erkennt man die Möglichkeit der **Dimensionsreduktion**; man berücksichtigt nur die kumulativ *wichtigsten* Singularwerte

$$\mathbf{Y} \approx \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T.$$

Das es sich dabei um eine optimale Approximation handelt, ergibt sich aus dem Satz von Eckart-Young; vgl. Garcia und Horn [8, Seite 348], Strang [15, Seite 303 ff] und Strang [16, Seite 71 ff].

Die Hauptkomponentenzerlegung kann auf die Singulärwertzerlegung zurückgeführt werden. Dabei betrachtet man die Stichprobenkovarianzmatrix (der vorher zentrierten Daten) Datenmatrix $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{N-1} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T.$$

$\mathbf{\Sigma}$ ist positiv semidefinit. Deshalb gibt es eine orthonormale Matrix $\mathbf{L}$, so dass

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{L},$$

dabei ist $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq 0$. Der Zusammenhang zwischen Singularwertzerlegung und Hauptkomponentenzerlegung ergibt sich aus $\lambda_i = s_i^2$.

Man nennt

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}^T \mathbf{Y}$$

die Hauptkomponenten; beachte $\mathbf{F}$ hat die gleiche Dimensionen $m \times T$ wie $\mathbf{Y}$.

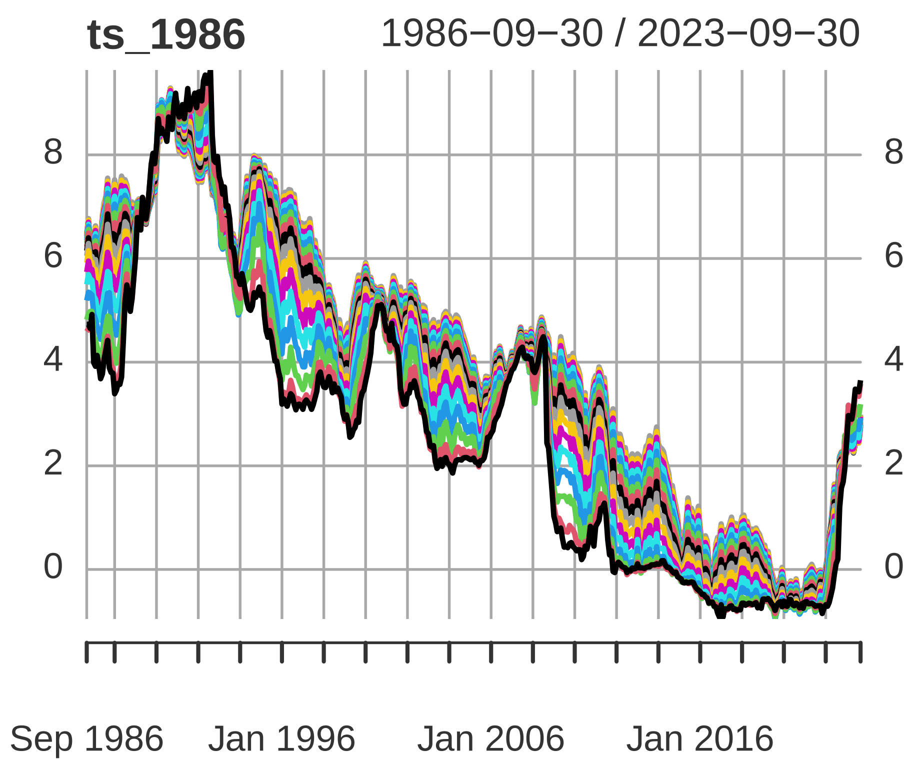
Es gilt $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{F}$. Eine Dimensionsreduktion erhält man wieder über das äußere Produkt

$$\mathbf{L}_{1\bullet}\mathbf{F} + \ldots + \mathbf{L}_{k\bullet}\mathbf{F} \ .$$

Statistische Analyse deutscher Zero Yields

In R-Skript `StatistischeAnaylseZinsstruktur_WiSe202425_2` führen wir eine statische Analyse durch. Bitte arbeiten Sie mit diesem Skript intensiv!

Die folgende Abbildung zeigt die verwendeten Daten.



Die PCA wurde auf die **Zinsdifferenzen** angewendet, da die Zinsen selbst mutmaßlich Trend behaftet sind.

Die Zusammenfassung der PCA ist:

	sd_{PC_i}	$\frac{\lambda_{PC_i}}{\sum_{j=1}^{i}\lambda_{PC_j}}$	γ_{PC_i}
PC1	0.79	0.83	0.83
PC2	0.31	0.13	0.96
PC3	0.16	0.03	0.99
PC4	0.07	0.01	1.00
PC5	0.04	0.00	1.00

Demnach erklären die ersten 2 Hauptkomponenten schon 96 Prozent der Variation der Zinsen und die ersten 3 sogar 99 Prozent.

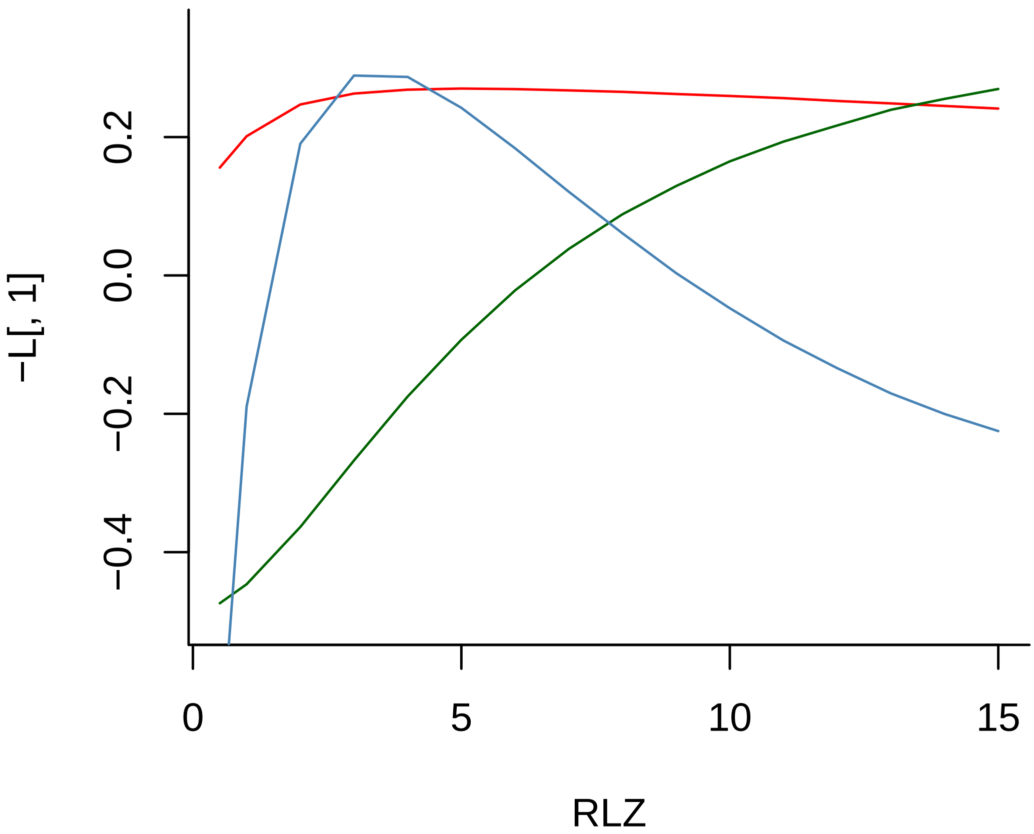
Die ersten drei mit R ermittelten Ladungen sind

	PC1	PC2	PC3
M6	-0.16	-0.47	-0.71
Y1	-0.20	-0.45	-0.19
Y2	-0.25	-0.36	0.19
Y3	-0.26	-0.27	0.29
Y4	-0.27	-0.17	0.29
Y5	-0.27	-0.09	0.24
Y6	-0.27	-0.02	0.18
Y7	-0.27	0.04	0.12
Y8	-0.27	0.09	0.06
Y9	-0.26	0.13	0.00
Y10	-0.26	0.16	-0.05
Y11	-0.26	0.19	-0.09
Y12	-0.25	0.22	-0.13
Y13	-0.25	0.24	-0.17
Y14	-0.25	0.26	-0.20
Y15	-0.24	0.27	-0.22

Die erste Ladung PC1 ist komplett negativ. $L_1 = -\mathrm{PC1}$ erfasst demnach Veränderungen des Niveau der Zinsdifferenzen.[13] Die zweite Ladung $L_2 = \mathrm{PC2}$ ist zunächst negativ und wird dann ab Y7 positiv. Die Ladung erfasst Variationen der Fristenspanne der Zinsdifferentiale. Die dritte Ladung ist zunächst negativ, dann positiv und schließlich wieder negativ. Diese Ladung erfasst Variationen der Krümmung.

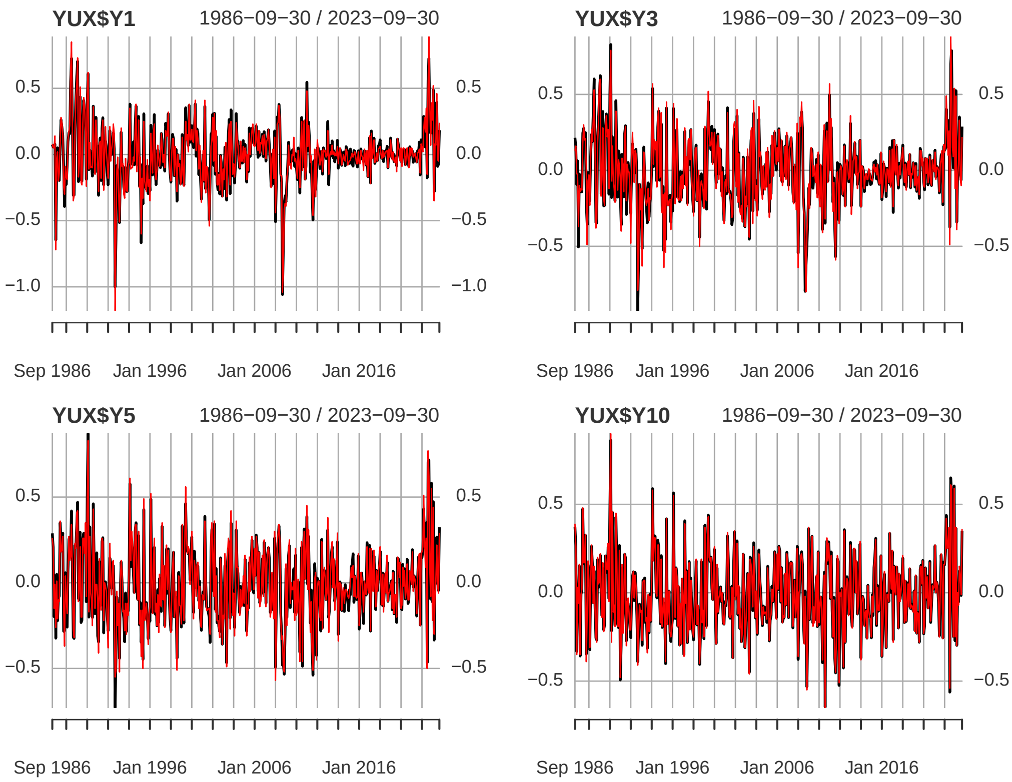
Die ersten drei Ladungen grafisch

[13] Wenn $\mathbf{v}$ eine EV ist, dann ist auch $-\mathbf{v}$ ein EV.



Die Zinsstruktur wird aus diesen drei Kurven zusammengesetzt. Die Faktoren liefern die Gewichte.

Die Güte der Approximation mit $k = 2$ (also nur die ersten beiden Hauptkomponenten) kann man an den folgenden Abbildungen erkennen.



In schwarz die Zeitreihen und in rot die Approximationen mit zwei Faktoren.

Die folgende Tabelle zeigt die Korrelationen zwischen den Zinsdifferenzen und den mit zwei Faktoren approximierten Zinsdifferenzen

τ	$\rho(z_i, \hat{z}_i)$
M6	0.86
Y1	0.98
Y2	0.98
Y3	0.98
Y4	0.98
Y5	0.98
Y6	0.99
Y7	0.99
Y8	1.00
Y9	1.00
Y10	1.00
Y11	1.00
Y12	0.99
Y13	0.99
Y14	0.98
Y15	0.98

1.5 Anleihen

1.5.1 Definiton: Eine **Anleihe** ist ein prototypischer Vertreter der **festverzinslichen Wertpapiere**. Charakterisiert wird ein festverzinsliches Wertpapier durch einen **Datumsvektor** $\mathbb{R}^{1+N} \ni (t_0, t_1, ..., t_N)^T, t_i < t_{i+1}, i = 0, ..., N-1$ und durch einen **Zahlungsvektor** $(c_0, c_1, ..., c_n)^T \in \mathbb{R}^{1+n}$.

Eine **Kuponanleihe** mit ganzzahliger Restlaufzeit $N \in \mathbb{N}$, jährlichen Kupons $c > 0$ und Rücknahmekurs L ist ein Finanzprodukt, dass dem Inhaber für die nächsten N Jahre – die erste Zahlung ist in genau einem Jahr – eine jährliche Zahlung in Höhe von c und eine einmalige Zahlung in Höhe von 1 in genau N Jahren verspricht.

Also: Bei einer **Kuponanleihe** mit jährlichen Kupons und **Emissi-**

onszeitpunkt t_E ist der Datumsvektor $(t_E, t_E + 1, ..., t_E + N)^T$ und der Zahlungsvektor $(-P^c, c, c, ..., c + L)^T$, dabei bezeichnet P^c hier den Emissionspreis der Anleihe. Man kann die Spezifikation tabellarisch angeben:

t_E	$t_E + 1$	$t_E + 2$	...	$t_E + N$
$-P^c_{t_E}$	c	c	...	$c + L$

Oder als Matrix mit zwei Zeilen (die ersten Zeile für die Zahlungszeitpunkte und die zweite Zeile für die jeweiligen Zahlungen):

$$\begin{pmatrix} t_E & t_E + 1 & t_E + 2 & ... & t_E + N \\ -P^c & c & c & ... & c + L \end{pmatrix}$$

Die erste Spalte $(t_E, -P^c)^T$ **ist dabei speziell**. Während der Rest der Matrix vertraglich fixiert ist, bildet sich P^c in t_E gemäß Angebot und Nachfrage (in einer Auktion).

Typischerweise werden wir $L = 1$ oder $L = 100$ als Standardisierung wählen.

1.5.2 Bemerkung: Wir wollen (natürlich) Anleihen nicht nur im Zeitpunkt der Emission t_E betrachten; schließlich werden Anleihen an Sekundärmärkten (Börsen) gehandelt. Es sei also $j \in \mathbb{N}$ mit $t = t_E + j$. t ist also das Datum einer Kuponzalhung. Ex-Kupon ist dann die Anleihe äquivalent zu einer Anleihe, die in t emittiert ist und eine um j kleinere Laufzeit hat; also $n = N - j$.

t	$t + 1$	$t + 2$	...	$t + n$
$-P^c_t$	c	c	...	$c + L$

1.5.3 Satz (Korbformel): Wir betrachten in t eine Anleihe mit der folgenden als Tabelle angegebenen Spezifikation:

t	t_1	t_2	...	t_N
$-P_t^c$	c	c	...	$c+L$

.

Wenn in t die Nullkuponanleihen mit den Fälligkeiten $t_1, ..., t_N$ zu den Preisen $Z(t, t_i), i = 1, ..., N$ gehandelt werden, dann ist der faire Preis der Kuponanleihe

$$P_t^c = c \cdot Z(t, t_1) + ... + c \cdot Z(t, t_N) + L \cdot Z(t, t_N).$$

Beweis: Übung

1.5.4 Bemerkung: Für eine Anleihe mit ganzzahliger Restlaufzeit N erhalten wir für den fairen Preis somit die folgende Formel

$$P_t^c = \frac{c}{1 + z_1(t, t+1)} + ... + \frac{c}{(1 + z_1(t, t+N))^N} + \frac{L}{(1 + z_1(t, t+N))^N}.$$

Wir beachten, dass **die Abzinsungen i.A. mit unterschiedlichen (von der passenden Laufzeit abhängigen) Zinsen erfolgen muss**. Für die Bewertung benötigen wir somit die **ganze Zinsstruktur**. Die Angabe nur eines Zinses – des Zinsniveaus – ist i.A. mindestens irreführend.

1.5.5 Definition: Die **interne Verzinsung oder Rendite**[14] bei diskreter jährlicher Verzinsung $i^* \in (-1, \infty)$ eines festverzinslichen Wertpapiers mit ganzzahliger Restlaufzeit $N \in \mathbb{N}$, jährlichen endfälligen Kupons $0 \leq c \in \mathbb{R}$, Rücknahmewert $0 \leq L \in \mathbb{R}$, wobei $c + L \neq 0$ und aktuellem Kurs $P > 0$ ist die Lösung i der nicht-linearen Gleichung

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{N} \frac{c}{(1+i)^k} + \frac{L}{(1+i)^N} \\ &= \frac{c}{(1+i)^N} \left(\frac{(1+i)^N - 1}{i} \right) + \frac{L}{(1+i)^N}. \end{aligned}$$

[14] Der Eindeutig bessere Begriff ist interne Verzinsung.

1.5.6 Bemerkung: i.) Wir betrachten die Funktion $F(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c}{x^k} + \frac{L}{x^N}$ mit $c \geq 0$ und $L \geq 0$, wobei $c + L \neq 0$ ist. Dann ist F monoton fallend und es gilt $\lim_{x\to 0} F(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Dementsprechend folgt, dass die obige Gleichung genau eine Lösung in $(-1, \infty)$ hat.
ii.) Praktisch (hoffentlich) relevant ist der Fall $i \in (0, \infty)$. Beachte: $i = 0$ ist äquivalent zu $P = N \cdot c + L$ und $i > 0$ ist äquivalent zu $P < N \cdot c + L$. Letzteres ist der Regelfall, da Gläubiger für das Abtreten von Finanzmitteln entschädigt werden wollen bzw. der Wettbewerb der potentiellen Schuldner mit guten Ideen dazu führt, dass Gläubiger eine positive Entschädigung durchsetzen können. Ein Blick auf die Verzinsung deutscher Staatsanleihen zeigt jedoch, dass negative Zinsen möglich sind.

1.5.7 Bemerkung: Wir betrachten eine Anleihe mit Kupon c, Rücknahmewert L und Restlaufzeit N. Wir betrachten die Gleichung für die interne Verzinsung i dieser Anleihe:

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{c}{(1+i)^k} + \frac{L}{(1+i)^N}$$

oder äquivalent

$$\Leftrightarrow (1+i)^N P = \sum_{j=0}^{N-1} c(1+i)^j + L.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} V_1 &= (1+i)^N P, \\ V_2 &= \sum_{j=0}^{N-1} c(1+i)^j + L. \end{aligned}$$

$V_1 = (1+i)^N P$ ist das Endvermögen nach N Jahren, wenn in $t = 0$ der Betrag P zum konstanten Zins i anlegt wird (z.B. auf einem Konto mit jährlicher Zins- und Zinseszinsgutschrift zum Zins i).

Wir beobachten

$$(1+i)^N P = V_1$$
$$P = \frac{V_1}{(1+i)^N}$$

i ist also auch die interne Verzinsung[15], wenn man P auf ein Konto einzahlt und am Ende V_1 erhält.

$V_2 = \sum_{j=0}^{N-1} c(1+i)^j + L$ ist das Endvermögen, dass sich aus der sukzessiven Anlage der Kupons c zum Zinssatz i und der Einnahme der finalen Zahlung L ergibt. Dieses Endvermögen ist theoretisch, denn es ergibt sich unter der theoretischen Annahme, dass die Kupon in $t = 1, 2, ...$ zum Zins i angelegt werden können.

Es gilt $V_1 = V_2$. Demnach kann man i als Rendite der folgenden Anlagestrategie auffassen: Die Kupons werden auf ein Konto eingezahlt. Auf diesen Konto werden Zinsgutschriften zum Zins i gewährt. Nach N Perioden erhält man das Vermögen, dass sich auf diesem Konto angesammelt hat, und den Rücknahmewert L. Man nennt deshalb i auch **Rendite-bis-Endfälligkeit (Yield-to-Maturity)**. Das ist angemessen, denn auch bei dieser Strategie verzichtet man in $t = 0$ bis T auf P und erhält dann V_2.

► Die Anlage der Kupons zum Zins i ist nur theoretisch. Man kann aber auf sogenannten Terminmärkten zu Terminzinsen anlegen. Damit werden wir später beschäftigen. Wenn die Anlage zu Terminzinsen erfolgt, dann ist die Rendite gleich der zero yield $z_1(0, N)$ für die Frist T.

1.5.8 Definition: i.) Eine Kuponanleihe mit Restlaufzeit $N + f \in \mathbb{R}, f \in (0, 1), N \in \mathbb{N}$, jährlichen Kupons $c > 0$ und Rücknahmekurs $L \geq 0$ ist ein Finanzprodukt, dass dem Inhaber jährliche Zahlungen in

[15] Beachte, dass diese Gleichung in der Tat eine Rendite definierende Gleichung ist. In der Tat entspricht diese Gleichung der Rendite definierenden Gleichung für eine NKA mit Nennwert V_1 und aktuellen Kurs P.

Höhe von c und eine einmalige Zahlung in Höhe von L in genau $N+f$ Jahren verspricht. Die erste Kuponzahlung ist in $f \in (0,1)$ Jahren, d.h. f ist der Anteil eines Jahres **bis zur nächsten Zahlung**. Bis zur Endfälligkeit gibt es also noch $N+1$ Zahlungen. Tabellarisch:[16]

$t_0 = 0$	$t_1 = f$	$t_2 = 1+f$	...	$t_{N+1} = N+f$
$-P_0$	c	c	...	$c+L$

oder

t	$t+f=t_1$	$t+f+1=t_2$	...	$t+f+N=t_{N+1}$
$-P_t^c$	c	c	...	$c+L$

ii.) Die **Rendite** bei diskreter jährlicher Verzinsung der unter i.) definierten Anleihe ergibt gemäß Definition sich aus der Lösung der Gleichung

$$P = \frac{1}{(1+i)^f}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{c}{(1+i)^k} + \frac{L}{(1+i)^N}\right) \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^{N+f}}\left(c \cdot \frac{(1+i)^{N+1}-1}{i}\right) + \frac{L}{(1+i)^{N+f}} \tag{1.2}$$

1.5.9 Definition: i.) Eine **Kuponanleihe** mit Restlaufzeit $N/2 \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$, **halbjährlichen** Kupons $c/2 > 0$ und Rücknahmekurs $L \geq 0$ ist ein Finanzprodukt, dass dem Inhaber jährliche Zahlungen in Höhe von c – die halbjährlich in Höhe von $c/2$ gezahlt werden – und eine einmalige Zahlung in Höhe von L in genau $N/2$ Jahren verspricht. Die erste Kuponzahlung ist in $1/2$ Jahren. N ist die Anzahl der Halbjahre bzw. Anzahl der Kuponzahlungen. Tabellarisch:

$t_0 = 0$	$t_1 = 1/2$	$t_2 = 1$	$t_3 = 1+1/2$	...	$t_N = N/2$
$-P$	$c/2$	$c/2$	$c/2$	...	$c/2+L$

[16] O.B.d.A. wählen wir regelmäßig $t_0 = 0$.

ii.) Die **Rendite** bei diskreter halbjährlicher Aufzinsung der unter i. definierten Anleihe ergibt sich gemäß Definition aus der Lösung i der Gleichung

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{N} \frac{c/2}{(1+i')^k} + \frac{L}{(1+i')^N} \\ &= \frac{1}{(1+i')^N}\left((c/2)\cdot\frac{(1+i')^N-1}{(1+i')-1}\right) + \frac{L}{(1+i')^N}, \\ i &= (1+i')^2-1. \end{aligned}$$

iii.) Eine Kuponanleihe mit Restlaufzeit $N/2+f/2 \in \mathbb{R}$, $f \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$, halb-jährlichen Kupons $c/2 > 0$ und Rücknahmekurs $L \geq 0$ ist ein Finanzprodukt, dass dem Inhaber jährliche Kupons in Höhe von c – die halbjährlich in Höhe von $c/2$ gezahlt werden – und eine einmalige Zahlung in Höhe von L in genau $N/2+f/2$ Jahren verspricht. Die erste Kuponzahlung ist in $f/2$ Jahren. f ist der **Anteil des Halbjahres** bis zur nächsten Zahlung und N ist die **Anzahl der Halbjahre, die dieser Zahlung bis zur Fälligkeit noch folgen**. Insgesamt gibt es also noch $N+1$ Zahlungen (siehe das folgende Beispiel zur Illustration).

Tabellarisch:

$t_0 = 0$	$t_1 = \frac{f}{2}$	$t_2 = \frac{f}{2} + \frac{1}{2}$	...	$t_{N+1} = \frac{f}{2} + \frac{N}{2}$
$-P$	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{2}$	...	$\frac{c}{2} + 1$

iv.) Die **Rendite** gemäß ISMA bei diskreter halb-jährlicher Verzinsung der unter iii.) definierten Anleihe ergibt sich gemäß Definition aus der Lösung i der Gleichung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(1+i')^f}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{c/2}{(1+i')^k} + \frac{L}{(1+i')^N}\right) \\ &= \frac{1}{(1+i')^{N+f}}\left((c/2)\cdot\frac{(1+i')^{N+1}-1}{(1+i')-1}\right) + \frac{L}{(1+i')^{N+f}}, \\ i &= (1+i')^2-1. \end{aligned}$$

1.5.10 Bemerkung: In der obigen Gleichung ermitteln wir (ohne zu annualisieren) zunächst den Periodenzins i' (hier einen Halbjahreszins). Dann annualisieren wir gemäß $i = (1+i')^2 - 1$ zum effektiven Jahreszins i. Periodenzinssätze unterschiedlicher Perioden lassen sich nicht gut vergleichen. Es ist deshalb üblich und wegen der besseren Vergleichbarkeit zweckmäßig zu **annualisieren**. Dabei gilt im Falle des Halbjahreszinssatzes

$$\begin{aligned}(1+i')^2 = (1+i) \text{ bzw. } i &= (1+i')^2 - 1 \\ \text{bzw. } (1+i)^{1/2} &= 1+i'.\end{aligned}$$

i ist dann der sogenannte **effektive Jahreszins** für einen Halbjahreszinssatz i'.

1.5.11 Bemerkung: i.) Bei m-facher Aufzinsung pro Jahr erfolgt die Annualisierung gemäß $i = (1+i')^m - 1$, denn:

$$\begin{aligned}i = (1+i')^m - 1 \text{ bzw. } (1+i')^m &= (1+i) \\ \text{bzw. } (1+i)^{1/m} &= 1+i'\end{aligned}$$

ii.) Eine andere Form der Annualisierung – die wir von vorne schon kennen – ist $i^* = m \cdot i'$; wir beobachten:

$$\left(1+\frac{i^*}{m}\right)^m = (1+i) = (1+i')^m$$

i^* heißt jährlicher **Nominalzinssatz** Daraus ermitteln wir die Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned}
i' &= \frac{i^*}{m} \\
i' &= (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \\
i^* &= m((1+i)^{1/m} - 1) \\
i^* &= m \cdot i' \\
i &= \left(1 + \frac{i^*}{m}\right)^m - 1 \\
i &= (1+i')^m - 1
\end{aligned}$$

Bei jährlicher Aufzinsung gilt bekanntlich (Übung), dass eine Anleihe gdw zu pari notiert wird, wenn $c = i$ gilt. Wenn die Aufzinsung m-mal erfolgt, dann ergibt sich die pari Notierung gdw

$$\frac{c}{m} = i' = \frac{i^*}{m}.$$

iii.) Wir betrachten weiter den Fall m-facher unterjähriger Verzinsung. Typischerweise wird der **Nominalzinssatz** i^* vereinbart. Die Aufzinsung pro $\frac{1}{m}$ Jahr ist dann $1 + \frac{i^*}{m}$. Nach einen Jahr ergibt sich die Aufzinsung $\left(1 + \frac{i^*}{m}\right)^m$. Der dazugehörige **Effektivzinssatz** ist $i = \left(1 + \frac{i^*}{m}\right)^m - 1$.

1.5.12 Beispiel: Angenommen wir betrachten eine Anlagealternative mit halbjährlicher Zinsgutschrift und im Prospekt steht, dass der **jährliche Nominalzinssatz** 5% beträgt. Damit ist dann $i^* = 0.05$ gemeint. Der Periodenzins beträgt $i' = 2.5\%$ und annualisiert eben $5\% = 2 \cdot 2.5$ %. Dann steigt das Vermögen nach einem Jahr um $i = 0.050625$ Prozent. Der **effektive Jahreszins** beträgt also 5.0625%, denn $(1 + 0.025)^2 = 1 + 0.050625$.

Ist also der effektive Jahreszinssatz besser? Nicht unbedingt. Angenommen wir wollen eine zur obigen Anlageform passende Anleihe mit halbjährlicher Kuponzahlung zu pari emittieren. Für diesen Zweck ist die

Angabe von i^* besser, denn dann können wir den passenden Halbjahres-Kupon $c/2 = 0.025$ direkt ablesen.

1.5.13 Bemerkungen: Die folgende **Formel** kann insbesondere zur Berechnung der Rendite **einheitlich** für $f \in [0,1)$ verwendet werden:

$$P = \frac{1}{(1+i')^{N+f}} \left(\frac{c}{m} \cdot \frac{(1+i')^{N+\lceil f \rceil} - 1}{i'} \right) + \frac{1}{(1+i')^{N+f}}.$$

1.5.14 Bemerkungen: Die Identitäten, die die Renditen definieren, werden manchmal als Bewertungsgleichungen "betrachtet". Beispielsweise könnte man die Gleichung

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{c}{(1+i)^k} + \frac{L}{(1+i)^N}$$

als Bewertungsgleichung für eine Anleihe mit RLZ N und Kupon c auffassen. Dabei ist i die Rendite. Das ist jedoch missverständlich, denn i ist die zu bestimmende **Unbekannte**.

Noch wichtiger: Wenn man die Rendite einer bestimmten Anleihe mit Restlaufzeit 10 Jahre, durch Lösen der entsprechenden Gleichung bestimmt hat, dann kann man den Wert $\tilde{P}$ einer anderen Anleihe (mit anderen Kupons) im Allgemeinen **nicht** durch die Gleichung

$$\tilde{P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\tilde{c}}{(1+i)^k} + \frac{\tilde{L}}{(1+i)^N} \tag{1.3}$$

ermitteln. Für die Bewertung von Anleihen benötigen wir also im Allgemeinen die Zinsstruktur (vergleiche die Korbformel).

1.5.15 Bemerkung: Über Preise und Renditen deutscher Staatsanleihen kann man sich umfassend hier informieren. `https://www.bundesbank.de/de/service/bundeswertpapiere/kurse-und-renditen`

1.5.16 Definition (Zinsstruktur): Es sei $z(t, t+\tau), \tau \geq 0$ die Rendite der NKA zum Zeitpunkt t mit Restlaufzeit τ (also mit Fälligkeit $T = t + \tau$). Die Abbildung $z(t, t + \circ) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \tau \mapsto z(t, t + \tau)$ heißt **Zinsstruktur** zum Zeitpunkt t.

1.5.17 Definition: Gegeben sei die Zinsstruktur $z(t, t + \tau_k), \tau_k = k \cdot {}^1\!/\!{}_m, k = 1, ..., N$ und $Z(t, t + \tau_k) = e^{-z(t,t+\tau_k)\cdot\tau_k}$. Die **Par Rate** für $k = 1, ..., N$ ist die Lösung c_{τ_k} der Gleichung

$$1 = \frac{c_{\tau_k}}{m} \cdot Z(t, t + \tau_1) + ... + \frac{c_{\tau_k}}{m} \cdot Z(t, t + \tau_k) + Z(t, t + \tau_k).$$

Diese Gleichung kann man nach c_{τ_k} umstellen und erhält

$$c_{\tau_k} = m \cdot \frac{1 - Z(t, t + \tau_k)}{\sum_{j=1}^{k} Z(t, t + \tau_j)}.$$

1.5.18 Bemerkung: Die Par Rate ist die Kuponrate, die zur Paribewertung der entsprechenden Kuponanleihe führt, d.h. der faire Preis entspricht dem Nennwert 1 (oder 100).

1.5.19 Bemerkung: Wenn die Par Raten bekannt sind, dann kann man die dazu passende Zinsstruktur ermitteln:

$$\begin{aligned} Z(t, T_1) &= \frac{1}{1 + {}^{c_{\tau_1}}\!/\!{}_m} \\ Z(t, T_2) &= \frac{1 - {}^{c_{\tau_2}}\!/\!{}_m \cdot Z(t, T_1)}{1 + {}^{c_{\tau_2}}\!/\!{}_m} \\ &\vdots \\ Z(t, T_K) &= \frac{1 - {}^{c_{\tau_K}}\!/\!{}_m \cdot \sum_{k=1}^{K-1} Z(t, T_k)}{1 + {}^{c_{\tau_K}}\!/\!{}_m}. \end{aligned}$$

Also kann man die Zinsstruktur auch mittels der par Raten angeben. Man spricht dann auch von par-Kurven.

Par-Raten sind nicht so *flexibel* wie zero yields. Par-Raten beziehen sich auf eine Periodisierung Δ. Man spezifiziert $c_{\tau_k} = c(t, t + \tau_k)$ für

$\tau_k = k \cdot 1/m, k = 1, ..., N$ auf einem Gitter. Zero yields werden für alle $T \geq$ modelliert.

1.5.20 Definition (Floating Rate Bond): Ein Floating Rate Bond ist durch die folgende Tabelle spezifiziert

$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	...	$t_N = N$
$-P^{\text{float}}_{t_0}$	$z_1(t_0, t_1) + s$	$z_1(t_1, t_2) + s$	...	$1 + z_1(t_{N-1}, t_N) + s$

Zeitschiene

$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_N = N$
$-P^{\text{float}}_{t_0}$	$z_1(t_0, t_1) + s$	$z_1(t_1, t_2) + s$	$1 + z_1(t_{2N-1}, t_{2N}) + s$

1.5.21 Satz (Floating Rate Bond): Es sei $s = 0$. Zu Zahlungszeitpunkt $t = t_i$ entspricht die faire ex-Kupon Bewertung der pari Bewertung:

$$P^{\text{float}}_{t_i} = 1.$$

Für $t_i \leq t < t_{i+1}$ ist der faire Wert

$$P^{\text{float}}_t = Z(t, t_{i+1}) \left(1 + z_1(t_i, t_{i+1})\right).$$

1.5.22 Definition (Floating Rate Bond): Ein Floating Rate Bond für $m = 2$ ist durch die folgende Tabelle spezifiziert

$t_0 = 0$	$t_1 = \frac{1}{2}$	$t_2 = 1$	...	$t_{2N} = N$
$-P^{\text{float}}_{t_0}$	$\frac{z_2(t_0,t_1)+s}{2}$	$\frac{z_2(t_1,t_2)+s}{2}$	...	$1 + \frac{z_2(t_{2N-1},t_{2N})+s}{2}$

bzw. durch die folgende

Zeitschiene

$t_0 = 0$	$t_1 = \frac{1}{2}$	$t_2 = 1$	$t_{2N} = N$
$-P_{t_0}^{\text{float}}$	$\frac{z_2(t_0,t_1)+s}{2}$	$\frac{z_2(t_1,t_2)+s}{2}$	$1 + \frac{z_2(t_{2N-1},t_{2N})+s}{2}$

1.5.23 Satz (Floating Rate Bond): Es sei $s = 0$ und $m = 2$. Zu Zahlungszeitpunkt $t = t_i$ entspricht die faire ex-Kupon Bewertung der pari Bewertung:

$$P_{t_i}^{\text{float}} = 1.$$

Für $t_i \leq t < t_{i+1}$ ist der faire Wert

$$P_t^{\text{float}} = Z(t, t_{i+1}) \left(1 + \frac{z_2(t_i, t_{i+1})}{2}\right).$$

1.5.24 Bemerkung zu Quoting Conventions: i.) Wir betrachten eine Kuponanleihe, die in t für den Preis P_t^{dirty} gehandelt wird. Der letzte Kupontermin sei t^- und der nächste Kupontermin t^+. Wir definieren den **bereinigten Preis**:

$$P^{\text{clean}} = P^{\text{dirty}} - SZ,$$

wobei $SZ = \frac{t-t^-}{t^+-t^-} c$ (**Stückzinsen**). Typischerweise wird dieser Preis von Börsen angegebenen und nicht der Rechnungspreis P_t^{dirty}.

Sogenannte Nuancen über die Berechnung der Stückzinsen werden hier nicht besprochen. Diese sind praktisch relevant aber finanzmathematisch uninteressant. Sie finden Erläuterungen dazu in den angegebenen Quellen.

ii.) Bei Nullkuponanleihen mit einer Restlaufzeit von weniger als einem Jahr – insbesondere bei Treasury Bills – geben Händler und Datenanbieter den Wert der Anleihe anstatt in Form eines Preises auf sogenannter

discount basis an:

$$d = \frac{1 - Z(t,T)}{1} \cdot \frac{360}{n},$$

wobei n die Zahl der Tage zwischen t und T ist. Durch die Multiplikation mit $\frac{360}{n}$ annualisiert.

Offensichtlich gilt

$$Z(t,T) = \left[1 - \frac{n}{360} \cdot d\right].$$

iii.) Bei Nullkuponanleihen mit einer Restlaufzeit von weniger als einem Jahr – also wie in ii.) – betrachtet man regelmäßig den sogenannten **Bond Equivalent Yield (BEY)**. Für $n \leq 182$ ist dieser so definiert

$$\text{BEY} = \frac{1 - Z}{Z} \cdot \frac{365}{n}.$$

Wir bemerken

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{\text{BEY}}{365/n}} = \frac{1}{1 + {}^{n}/365 \cdot \text{BEY}}.$$

Bei halbjährlicher Verzinsung und $n > 182$ ist der BEY **gemäß (einer) Konvention** die Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + \left(\frac{n}{365} - \frac{1}{2}\right)\text{BEY}\right)\left(1 + \frac{\text{BEY}}{2}\right)Z \\ &= \left(1 + \frac{\text{BEY}}{2}\right)Z + \left(\frac{n}{365} - \frac{1}{2}\right)\text{BEY}\left(1 + \frac{\text{BEY}}{2}\right)Z \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man explizit lösen:

$$\begin{aligned} \mathrm{BEY} &= \frac{-\frac{2n}{365} + 2\sqrt{\left(\frac{n}{365}\right)^2 - \left(\frac{2n}{365} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{Z}\right)}}{\frac{2n}{365} - 1} \\ &= \frac{-\frac{n}{365} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{365}\right)^2 - 2\left(\frac{n}{365} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{Z}\right)}}{\left(\frac{n}{365} - \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

iv.) Manchmal – z.B. Reuters/Datastream[17] – werden Preise von Anleihen in $\frac{1}{32}$-Schritten angegeben. Dabei gilt z.B.

$$99{*}26 = 99 + \frac{26}{32} = 99.8125.$$

Wenn diese Angabe nicht genau genug ist, dann

$$99{*}26\,{}^3\!/\!_4 = 99 + \frac{26}{32} + \frac{3}{4}\frac{1}{32} = 99.83594$$

1.6 Terminzinsen, Forwardzinsen, Forward Rate Agreement, Zinsfutures

Wir setzen stets $Z(t,T) > 0$ voraus.[18]

1.6.1 Definition (Forwarddiskontfaktor): Es sei $t \leq T_1 < T_2$. Wir definieren den **Forwarddiskontfaktor**:

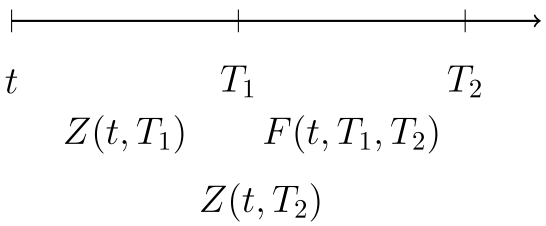
$$F(t, T_1, T_2) = \frac{Z(t, T_2)}{Z(t, T_1)}.$$

Für $T_1 = t$ erhalten wir $F(t, t, T_2) = Z(t, T_2)$.

Zeitschiene

[17] `FING` und dann `Bond`

[18] denn wir wollen durch diesen Wert teilen



Das ist eine Definition. Was F *bedeutet*, wird im folgenden erläutert.

1.6.2 Bemerkung: Für den späteren Gebrauch notieren wir die offensichtliche Umformung der Gleichung der Definition, nämlich

$$Z(t,T_2) = Z(t,T_1)F(t,T_1,T_2).$$

Schematisch: $t \xleftarrow{Z(t,T_2)} T_2 \sim (t \xleftarrow{Z(t,T_1)} T_1) \circ (T_1 \xleftarrow{F(t,T_1,T_2)} T_2)$.

i.) Man kann die Diskontierung von T_2 auf t also **in (zwei) Perioden zerlegen**. Erst von T_2 bis T_1 diskontieren, dann von T_1 bis t. Die Diskontierung von T_2 auf T_1 erfolgt dabei mit dem Forwarddiskontfaktor. **Dieser Faktor ist in t bekannt! Er bezieht sich (aber) auf ein Zeitintervall das komplett in der Zukunft (hinter t) liegt.**

ii.) Man kann den **Preis der Nullkuponanleihe als Produkt von Preisen darstellen**. Es wird sich nämlich zeigen, dass $F(t,T_1,T_2)$ ein Lieferpreis (Forwardpreis) ist (siehe unten).

1.6.3 Defintion: Ein **Forward** ist ein **unbedingter** Vertrag bei dem im Zeitpunt $t = t_0$ der Kontrahent mit der sogenannten **Käufer-Position (Long-Position)** mit dem Kontrahenten mit der sogenannten **Verkäufer-Position** (**Short-Position**) **verbindlich** den Kauf eines **Basiswertes**[19] zum **Lieferpreis** F vereinbart, wobei die Lieferung des Basiswertes und die Zahlung des Betrages F für den Zeitpunkt T vorgesehen sind. T heißt Fälligkeit und F (auch) **Forwardpreis**. Der Lieferpreis wird so gewählt, dass **in t_0 keine Zahlung stattfindet**, d.h. der Wert bzw. die **Anschaffungskosten/Initiationskosten** des Forwards in t_0

[19] Der Begriff Basiswert ist üblich aber nicht besonders treffend.

ist Null. In diesem Sinn ist der Forwardpreis *nicht* der Preis (die Anschaffungskosten) des Forwards. Vielmehr sind die Anschaffungskosten eines Forward in t_0 gleich 0.

1.6.4 Bemerkung: Wenn man in t_0 (on spot) die NKA mit Fälligkeit T_2 kauft, dann zahlt man $Z(t_0, T_2)$. Wenn man die T_2-NKA in t_0 für die Lieferung am T_1 vorbestellt (auf Termin), dann zahlt man $F(t_0, T_1, T_2)$ bei Lieferung in T_1. Wenn man in T_1 die T_2-NKA kauft, dann muss man $Z(T_1, T_2)$ zahlen.

1.6.5 Satz: Zum Zeitpunkt t_0 ist der Forwarddiskontfaktor $F(t_0, T_1, T_2)$ der **faire Lieferpreis (Forwardpreis)** des Forwards mit Lieferdatum T_1 auf eine T_2-NKA mit Fälligkeit T_2.

In t_0 ist der Wert V_t des Forward Null, denn bei Vertragsabschluss wird der Lieferpreis so vereinbart, dass kein Geld gezahlt werden muss.

Für $t_0 < t < T_1$ gilt

$$V_t = Z(t, T_1) \left[F(t, T_1, T_2) - F(t_0, T_1, T_2)\right].$$

Beweis: Wir betrachten den Fall, dass $K < F(t_0, T_1, T_2) = \frac{Z(t_0,T_2)}{Z(t_0,T_1)}$. Der Lieferpreis des Forward ist zu klein. Wir kaufen einen Forward und K T_1-NKA und verkaufen $\frac{KZ(t_0,T_1)}{Z(t_0,T_2)}$ T_2-NKA. [Sie sollten sich überlegen, wie man auf diese Strategie kommt.]. Diese Strategie ist eine Arbitrage. ...?

Ein ausführlicher Beweis ist in den handschriftlochen Notizen Dezemeber 2024.

1.6.6 Satz: Bei Vereinbarung in t_0 ist der faire Lieferpreis einer Kuponanleihe

$$\begin{aligned} P^{\text{Forward}}(t_0, T, T_N) = {} & cF(t_0, T, T_1) + cF(t_0, T, T_2) + ... \\ & + cF(t_0, T, T_{N-1}) + (c+1)\, F(t_0, T, T_N), \end{aligned}$$

dabei ist T der Lieferzeitpunkt und T_i sind Termine für die Zahlungen für die Kupons.

In t_0 ist der Wert $V_{t_0} = 0$ des Forward Null, denn bei Vertragsabschluss wird der Lieferpreis so vereinbart, dass kein Geld gezahlt werden muss.

Für $t_0 < t < T$ gilt

$$V_t = Z(t,T)\left[P^{\text{Forward}}(t,T,T_N) - P^{\text{Forward}}(t_0,T,T_N)\right].$$

Beweis: Idee: Eine Kuponanleihe ist ein Korb von NKAs.

► Wie im Fall von Diskontfaktoren ist die Verwendung von besser interpretierbaren Raten nützlich.

1.6.7 Definition: Wir definieren den **Forwardzins** (bei stetiger Aufzinsung):

$$\begin{aligned} f(t,T_1,T_2) &= \frac{-\ln F(t,T_1,T_2)}{T_2 - T_1}, \\ F(t,T_1,T_2) &= e^{-f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}. \end{aligned}$$

Bei m-facher unterjähriger Aufzinsung definieren wir

$$\begin{aligned} f_m(t,T_1,T_2) &= m \cdot \left(\frac{1}{F(t,T_1,T_2)^{\frac{1}{m(T_2-T_1)}}} - 1 \right), \\ F(t,T_1,T_2) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{f_m(t,T_1,T_2)}{m}\right)^{m(T_2-T_1)}}. \end{aligned}$$

Wenn $T_2 = T_1 + \Delta, \Delta = \frac{1}{m}$, dann

$$\begin{aligned} f_m(t,T_1,T_2) &= m \cdot \left(\frac{1}{F(t,T_1,T_2)} - 1 \right) \\ F(t,T_1,T_2) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{f_m(t,T_1,T_2)}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Für den späteren Gebrauch stellen wir noch den Zusammenhang zu den

NKA Preisen her. Es gilt

$$\frac{Z(t,T_1)}{Z(t,T_2)} = 1 + \frac{f_m(t,T_1,T_2)}{m}$$

bzw.

$$\frac{f_m(t,T_1,T_2)}{m} = \frac{Z(t,T_1) - Z(t,T_2)}{Z(t,T_1)}$$

1.6.8 Satz: Es sei $t_0 < T_1 < T_2$. Zum Zeitpunkt (der Vereinbarung) t_0 ist der Forwardzins $f(t_0, T_1, T_2)$ der **faire Terminzins** für die Geldleihe von T_1 bis T_2.

Beweis: ...

1.6.9 Beispiel: Die folgende Tabelle zeigt die Geldleihe auf Termin. Geliehen wird für ein Jahr der Betrag N und der Zins wird mit jährlicher Aufzinsung notiert.

ZP	$t_0 = 0$	T_1	T_2
Cash	0	$-N$	$(1+k)N$

Wenn der Terminzins k nicht dem Forwardzins f_1 entspricht, dann gibt es eine Arbitrage. Welche?

1.6.10 Satz: Wir betrachten eine Sequenz von Terminen $T_0 = 0, T_1 = T_0 + \Delta, T_2 = T_1 + \Delta, ..., T_n = T_{n-1} + \Delta, \Delta = {}^1/_m$. Es gilt

$$z(0,T_n) = \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{n} f(0,T_{k-1},T_k)\cdot\Delta$$
$$Z(0,T_n) = e^{-z(0,T_n)T_n} = e^{-\sum_{k=1}^{n} f(0,T_{k-1},T_k)\cdot\Delta}$$

Die zero yield $z(0,T_n)$ entspricht also den durchschnittlichen Forwarraten $\frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{n} f(0,T_{k-1},T_k)\cdot\Delta$.

Beweis: Wir betrachten

$$\begin{aligned} Z(t_0, T_n) &= Z(t_0, T_{n-1}) F(t_0, T_{n-1}, T_n) \\ &= Z(t_0, T_{n-2}) F(t_0, T_{n-2}, T_{n-1}) F(t_0, T_{n-1}, T_n) \\ &\text{... usw} \end{aligned}$$

1.6.11 Definition: Die folgende Tabelle charakterisiert die Spezifikation eines **Forwardrate Agreement (FRA)**

ZP →	t_0	T_1	T_2
Cash →	V_{t_0}	0	$N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_1, T_2) - k]$

Dabei ist $T_2 = T_1 + \Delta, m = {}^1/_\Delta$. Hier muss man beachten, dass die Auszahlung des FRAs riskant (zufällig) ist. Schließlich realisiert sich der Zins $z_m(T_1, T_2)$ erst in T_1 und der Vertrag wird in $t_0 < T_1$ vereinbart.

Die Zahlungen oben sind aus Sicht des Kontrahenten, der die variable Zinsen erhält und die fixe Rate zahlt. Im Vertrag wird (natürlich) festgelegt, welche Partei das ist.

Wie k in der Praxis gewählt wird und was das für V_{t_0} bedeutet, werden gleich erläutern. Bei einem FRA erhält also der Inhaber in T_2 die Zahlung $N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_1, T_2) - k]$. Der konkrete Wert der Zahlung ist in T_1 bekannt. Manchmal wird der Forward auch schon in T_1 ausgezahlt. Dann beträgt die Zahlung $\frac{N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_1, T_2) - k]}{1 + z_m(T_1, T_2)}$.

1.6.12 Bemerkung: Für die Bewertung des FRA betrachten wir die folgende Strategie

WP	T_1-NKA	T_2-NKA	GM
$\mathbf{h}_{t_0}$	N	$-N \cdot (1 + \Delta \cdot k)$	0
$\mathbf{h}_{T_1}$		$-N \cdot (1 + \Delta \cdot k)$	N

In Worten: In t_0 kaufen wir N Stücke T_1-NKA und leerverkaufen $N \cdot (1 + \Delta \cdot k)$ Stücke T_2-NKA. In T_1 legen wir die N, die wir aus den T_1 NKA erhalten am Geldmarkt zum Zins $z(T_1, T_2)$ an.

Diese Strategie hat in T_2 die gleiche Auszahlung wie der FRA:

$$\begin{aligned} &N \cdot (1 + \Delta \cdot z_m(T_1, T_2)) - N \cdot (1 + \Delta \cdot k) \\ &= N \cdot \Delta \cdot z_m(T_1, T_2) - N \cdot \Delta \cdot k \\ &= N \cdot \Delta \cdot (z_m(T_1, T_2) - k). \end{aligned}$$

In T_1 wird weder Geld entnommen noch Geld nachgeschossen; man sagt die Strategie ist **selbst-finanzierend**.

Die Anschaffungskosten dieser den FRA replizierenden Strategie müssen dem fairen Wert V_{t_0} des FRA in t_0 entsprechen, sonst gäbe es eine Arbitrage. Also

$$V_{t_0} = N \cdot Z(t_0, T_1) - N \cdot (1 + \Delta \cdot k) \cdot Z(t_0, T_2).$$

In der Praxis wird der FRA so vereinbart, dass $V_{t_0} = 0$ gilt. Mit dieser Festsetzung kann man den passenden Wert von k bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= Z(t_0, T_1) - (1 + \Delta \cdot k) \cdot Z(t_0, T_2) \\ \Leftrightarrow \ k &= \frac{Z(t_0, T_1) - Z(t_0, T_2)}{\Delta \cdot Z(t_0, T_2)} = f_m(t_0, T_1, T_2), \end{aligned}$$

wobei wir $T_2 = T_1 + \Delta, \Delta = \frac{1}{m}$ beachten.

► Wir können den fairen Wert

$$V_{t_0} = N \cdot Z(t_0, T_1) - N \cdot (1 + \Delta \cdot k) \cdot Z(t_0, T_2).$$

des FRA bestimmen, ohne Bezug auf den *erwarteten* kurzfristigen Zins zu nehmen. Das ist überraschend! Eigentlich würden wir doch erwarten, dass die Erwartung für $\mathbb{E}[z_m(T_1, T_2)]$ einen Einfluss auf den fairen Wert von k hat. Wenn $\mathbb{E}[z_m(T_1, T_2)]$ sehr groß ist, dann werden wir doch vermuten, dass auch k groß ausgehandelt wird. Wo sind die Erwartungen? Die Erwartungen sind in den Werten der Zinsstruktur $Z(t_0, T_1)$, $Z(t_0, T_2)$ enthalten. Für die Bewertung von FRA benötigen wir demnach kein Modell zur Stochastik der Zinsen.

1.6.13 Definition (noch FRA): Tatsächlich werden FRAs so vereinbart, dass der Wert zum Zeitpunkt der Vereinbarung t_0 Null ist. Also sieht die typische Spezifikation so aus:

ZP	t_0	T_1	T_2
Cash	0	0	$N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_1, T_2) - f_m(t_0, T_1, T_2)]$

,

wobei $T_2 = T_1 + \Delta, m = {}^1\!/\!_\Delta$ gilt und sich

$$\frac{Z(t_0, T_1) - Z(t_0, T_2)}{\Delta \cdot Z(t_0, T_2)} = f_m(t_0, T_1, T_2)$$

aus der Definition des Forwardzinses f_m ergibt.

1.6.14 Bemerkung: Für irgendein k lautet die Bewertungsformel für den FRA

$$V_{t_0} = N \cdot Z(t_0, T_1) - N \cdot (1 + \Delta \cdot k) \cdot Z(t_0, T_2).$$

1.6.15 Bemerkung: Motive für FRA: Hedging und Wetten. ... Quellen

▶ Die folgende Nummer muss ich noch korrigieren. Ich vermute, dass sich ein Fehler eingeschlichen hat ...

1.6.16 Bemerkung: FRAs sind OTC Kontakte mit der folgenden tabellarisch dargestellten Spezifikation:

ZP	t_0	T_1	T_2
X	0	0	$N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_1, T_2) - f_m(t_0, T_1, T_2)]$

.

An Börsen kann man **Zinsfutures** handeln. Futures und Forwards sind eng verwandte Finanzprodukte. Futures sind **standardisiert** und werden an Börsen gehandelt. Dabei werden sie täglich *abgerechnet* (**mark-to-market**).

Für die tägliche Abrechnung und für die Etablierung eines Marktes benötigen man eine **Quotierung**. Wir betrachten Zinsfutures mit $\Delta = \frac{1}{4}, m = 4$. Quotiert wird (also mit $N = 1$)

$$Q_t = 1 - f_m(t, T_1, T_1 + \Delta).$$

Zur Endfälligkeit gilt $Q_{T_1} = 1 - z_m(T_1, T_2)$.

Für das tägliche **Mark-To-Market** (tägliche Abrechnung) wird die Formel

$$F_t = 1 - \Delta \cdot f_m(t, T_1, T_1 + \Delta).$$

Die tägliche Gutschrift/Lastschrift pro Einheit N ist deshalb

$$\begin{aligned} F_{t+1} - F_t &= \Delta \cdot (f_m(t, T_1, T_1 + \Delta) - f_m(t + 1, T_1, T_1 + \Delta)) \\ &= \Delta \cdot (Q_{t+1} - Q_t) . \end{aligned}$$

Wir betrachten die kumulierten Gutschriften von t_0 bis T_1 eines Anlegers der einen Future kontrahiert hat:

$$\begin{aligned}
&\Delta \cdot (f_m(t_0, T_1, T_1+\Delta) - f_m(t_1, T_1, T_1+\Delta)) \\
&+ \Delta \cdot (f_m(t_1, T_1, T_1+\Delta) - f_m(t_2, T_1, T_1+\Delta)) \\
&+ \dots \\
&+ \Delta \cdot (f_m(T_1-\Delta, T_1, T_1+\Delta) - f_m(T_1, T_1, T_1+\Delta)) \\
&= \Delta \cdot (f_m(t_0, T_1, T_1+\Delta) - f_m(T_1, T_1, T_1+\Delta)) \\
&= \Delta \cdot (f_m(t_0, T_1, T_1+\Delta) - z_m(T_1, T_1+\Delta))
\end{aligned}$$

Obwohl die kumulierte Zahlung (bis auf die Richtung) der finalen Zahlung eines FRA entspricht sind FRAs und Zinsfuture nicht (ganz) äquivalent, dann die Guthaben/Lasten auf dem Konto bei der Börse werden verzinst.

1.6.17 Bemerkung: Wir bleiben bei $N = 1$. Wenn der FRA in t_0 den Wert Null hat, dann muss die für den Zeitpunkt T_2 vorgesehene riskante Zahlung im Zeitpunkt t_0 den gleichen Wert haben wie die für den Zeitpunkt T_2 vorgesehene fixe Zahlung im Zeitpunkt t_0. Deshalb erhalten wir:

$$\mathrm{Wert}_{t_0}(X_{T_2} = \Delta \cdot z_m(T_1, T_2)) = \mathrm{Wert}_{t_0}(X_{T_2} = \Delta \cdot f_m(t_0, T_1, T_2))$$

$f_m(t_0, T_1, T_2)$ ist in t_0 gegeben, so dass wir weiter erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Wert}_{t_0}(X_{T_2} = \Delta \cdot f_m(t_0, T_1, T_2)) &= \Delta \cdot f_m(t_0, T_1, T_2) \cdot Z(t_0, T_2) \\
&= Z(t_0, T_1) - Z(t_0, T_2).
\end{aligned}$$

Wir werden diese Beobachtung auch für die Bewertung von Swaps benötigen, deshalb sei die Gleichung noch mal etwas anders angeben. Die für den Zeitpunkt T_2 vorgesehene riskante Zahlung hat in t den Wert

$$\begin{aligned} V_t(X_{T_2} = \Delta \cdot z_m(T_1,T_2)) &= \Delta \cdot f_m(t_0,T_1,T_2)Z(t_0,T_2) \\ &= Z(t_0,T_1) - Z(t_0,T_2) \\ &= \Delta \cdot f_m(t_0,T_1,T_2) \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z_m}{m}\right)^{m(T_2-t)}}. \end{aligned}$$

Wir notieren für den späteren Gebrauch den Randfall

$$\begin{aligned} V_{T_1}(X_{T_2} = \Delta \cdot z_m(T_1,T_2)) &= \Delta \cdot z_m(T_1,T_2) \cdot Z(T_1,T_2) \\ &= \Delta \cdot f_m(T_1,T_1,T_2) \cdot Z(T_1,T_2) \\ &= Z(T_1,T_1) - Z(T_1,T_2) \\ &= 1 - Z(T_1,T_2). \end{aligned}$$

1.6.18 Bemerkung Der faire Wert in $t < T_1$ der bedingten Zahlung $\Delta \cdot z_2(T_1, T_1+\Delta)$ in $T_2 = T_1+\Delta, \Delta = \frac{1}{2}$ ist $Z(t,T_1) - Z(t,T_1+\Delta)$.

$$V_t = \text{Wert}_t(X_{T_2} = \Delta \cdot z_2(T_1,T_1+\Delta)) = Z(t,T_1) - Z(t,T_1+\Delta)$$

Beweis: Wir betrachten die folgende Strategie: Leerverkaufe 1 NKA mit Fälligkeit in $T_1+\Delta$ und Kaufe 1 NKA mit Fälligkeit in T_1. In T_1 wird die Auszahlung von 1 der T_1-NKA für den Zins $z_2(T_1,T_1+\Delta)$ angelegt. Die Auszahlung in T_2 ist dann

$$-1 + (1+\Delta z_2(T_1,T_1+\Delta)) = \Delta z_2(T_1,T_1+\Delta).$$

Die Auszahlung entspricht also der Auszahlung des Derivates. Die Anschaffungskosten der Strategie sind $-Z(t,T_1+\Delta) + Z(t,T_1)$. □

1.6.19 Proposition: Der faire Wert V_t zum Zeitpunkt t der Zahlung $\tau z^l(T_1,T_2), \tau = T_2 - T_1$ zum Zeitpunkt T_2 ist

$$V_t = \text{Wert}_t(\, X_{T_2} = \tau z^l(T_1,T_2)\,) = Z(t,T_1) - Z(t,T_2)$$

Beweis: Wir verwenden Bewertung durch Replikation. An der rechten Seite $Z(t,T_1) - Z(t,T_2)$ der Bewertungsgleichung können das replizierende Portfolio (fast) ablesen. Wir kaufen eine T_1-NKA und verkaufen eine T_2-NKA. Die Anschaffungskosten betragen $Z(t,T_1) - Z(t,T_2)$.

In T_1 erhalten wir die Auszahlung in Höhe von 1 aus der T_1-NKA. Dieses Vermögen legen wir zum linearen Zins $z^l(T_1,T_2)$ für die Dauer τ am Geldmarkt an.

In T_2 erhalten wir $1 + \tau z^l(T_1,T_2)$ vom Geldmarkt und benötigen 1 GE um den Leerverkauf der T_2-NKA auszugleichen. Netto erhalten wir somit in T_2 die Zahlung $\tau z^l(T_1,T_2)$.

1.6.20 Bemerkung: Wenn wir die Bewertungsformel der vorvorhergehenden Bemerkung bzw. der vorhergehenden Proposition für den riskanten Teil eines FRAs beachten, dann erhalten wir eine schöne Gleichung für den Wert des FRAs in $t > t_0$ (o.B.d.A $N = 1$):

$$\begin{aligned}
V_t &= V_t^{\text{float}} - V_t^{\text{fix}} \\
&= Z(t,T_1) - Z(t,T_2) - Z(t,T_2) \cdot f_m(t_0,T_1,T_2) \cdot \Delta \\
&= Z(t,T_1)N - Z(t,T_2) \cdot (1 + f_m(t_0,T_1,T_2) \cdot \Delta) \\
&= Z(t,T_2) \cdot \left(\frac{Z(t,T_1)}{Z(t,T_2)} - [1 + f_m(t_0,T_1,T_2) \cdot \Delta] \right) \\
&= Z(t,T_2) \cdot ([1 + f_m(t,T_1,T_2) \cdot \Delta] - [1 + f_m(t_0,T_1,T_2) \cdot \Delta]) \\
&= Z(t,T_2) \cdot \Delta \cdot [f_m(t,T_1,T_2) - f_m(t_0,T_1,T_2)]
\end{aligned}$$

Diese Formel kann man auch anders ableiten; nämlich wie im Beweis der zweiten Formel im Satz (1.6.5).

1.6.21 Proposition: Der Wert eines in t_0 abgeschlossen FRAs zum Zeitpunkt $t_0 < t < T_1$ ist

$$V_t = N \cdot Z(t,T_2) \cdot \Delta \cdot [f_m(t,T_1,T_2) - f_m(t_0,T_1,T_2)] \,.$$

1.7 Forward Kurven

1.7.1 Definition: Wir wählen ein festes Δ (z.B. 1 Quartal, $\Delta = \frac{1}{4}$); Δ heißt in diesem Zusammenhang **Referenzperiode**. Der Graph der Funktion

$$[0, T^{\max}] \ni T \mapsto \frac{-\ln F(0,T,T+\Delta)}{\Delta} = f(0,T,T+\Delta)$$

heißt **Forwardkurve**.

1.7.2 Bemerkung: Wir beobachten

$$\begin{aligned} & F(0,T,T+\Delta) = \frac{Z(0,T+\Delta)}{Z(0,T)} \\ \Rightarrow\ & \ln F(0,T,T+\Delta) = \ln Z(0,T+\Delta) - \ln Z(0,T) \\ \Rightarrow\ & -f(0,T,T+\Delta) = \frac{\ln F(0,T,T+\Delta)}{\Delta} \\ & = \frac{\ln Z(0,T+\Delta) - \ln Z(0,T))}{\Delta}. \end{aligned}$$

1.7.3 Definition: Betrachtet man in

$$f(0,T,T+\varepsilon) = -\frac{\ln Z(0,T+\varepsilon) - \ln Z(0,T))}{\varepsilon}$$

den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, dann erhält man die sogenannte **instantane Forwardrate**

$$f(t,T) := -\frac{d}{dT} \ln Z(t,T) = -\frac{\frac{d}{dT} Z(t,T)}{Z(t,T)}.$$

Die instantane Forwardrate $f(t,T)$ ist also eine **Semi-Elastizität** (Steigung in Prozent) der Zinsstruktur bezüglich der Restlaufzeit. Wir bemerken, dass eine Forwardrate im Allgemeinen drei Argumente hat, während die instantane Forwardrate nur zwei Argumente hat.

1.7.4 Definition: $f(t,t) = r(t)$ heißt **Short Rate**.

1.7.5 Bemerkung: Man kann die Zinsstruktur aus der instantanen Forwardrate durch Integration zurückgewinnen:

$$Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

und

$$z(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du.$$

Dieser Zusammenhang entspricht dem diskreten Zusammenhang aus Satz (1.6.10.)

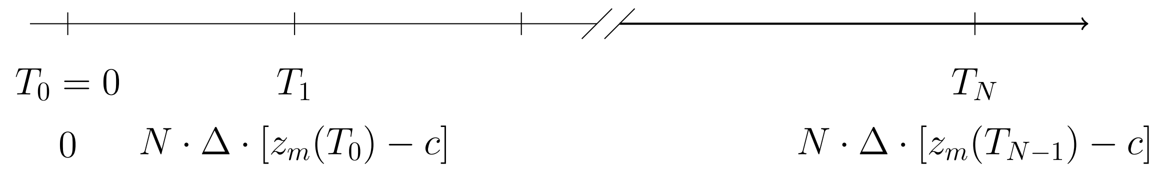
1.8 Swaps

1.8.1 Definition: Ein Spot **Swap** ist durch die Angaben in der folgenden Tabelle spezifiziert

ZP	T_0	T_1	...	T_N
X	0	$N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_0) - c]$	...	$N \cdot \Delta \cdot [z_m(T_{N-1}) - c]$

c heißt die **Swaprate** des Swaps und N Nennwert.

Zeitschiene



Der Vertragsbeginn und Betrachtungszeitpunkt ist T_0. Es gilt $T_i = T_{i+1} + \Delta, m = \frac{1}{\Delta}$. Wir verwenden die Notation $z_m(T_i) = z_m(T_i, T_{i+1})$. Es ist wichtig, dass zum Zeitpunkt T_i die Zahlung für T_{i+1} bekannt ist. Ferner muss man beachten, dass c nicht willkürlich gewählt werden kann. Vielmehr wird c so gewählt, dass zu Vertragsbeginn der Wert des Swaps Null ist. Die Anschaffungskosten eines Swaps betragen also Null, dementsprechend ist der Eintrag bei T_0 in der Zeitschiene und der Tabelle 0.

Wir beachten das der Nennwert nicht gezahlt, sondern lediglich zur Berechnung der Zinszahlungen benötigt wird.

1.8.2 Bemerkung: Ein Swap entspricht einer Sequenz von FRAs.

1.8.3 Bemerkung: Motive für Swaps. Quellen ...?

Mit einem Swap kann eine Bank kurzfristige Einlagen umwandeln.

Manche Unternehmen bekommen am Markt bei einer variablen Verzinsung (scheinbar) bessere Konditionen. Die Hausbank kann dann - weil Sie die Hausbank ist – aus der variabel verzinsten Verbindlichkeiten eine festverzinsliche Verbindlichkeit machen.

Zins für eine Sequenz von Finanzierungsrunden einloggen.

1.8.4 Satz: Der faire Wert des Swaps zu Vertragsbeginn T_0 ist

$$V_{T_0} = 1 - \left(\frac{c}{m} \sum_{j=1}^{N} Z(T_0, T_j) + Z(T_0, T_N) \right).$$

Die Swaprate c wird praktisch so gewählt, dass die Anschaffungskosten $V_{T_0} = 0$ sind, d.h.

$$c = m \cdot \frac{1 - Z(T_0, T_N)}{\sum_{j=1}^{N} Z(T_0, T_j)}.$$

Insbesondere gilt

$$c = c^{\text{par}}.$$

Beweis: Übung

1.8.5 Satz: Der faire Wert des Swaps in t mit $T_{i-1} < t < T_i$ ist

$$V_t = Z(t,T_i)\left(1+\frac{z_m(T_{i-1},T_i)}{m}\right) - \left(\frac{c}{m}\sum_{j=i}^{N} Z(t,T_j) + Z(t,T_N)\right).$$

1.8.6 Definition: Die Swapraten $c^s(t,T_i), i = 1,...,M$ der Swaps mit Vertragsbeginn t und Endfälligkeit T_i definieren die sogenannte **Swapkurve**:

$$T_i \mapsto c^s(t,T_i)$$

1.8.7 Satz: Es gilt

$$Z(t,T_1) = \frac{1}{1+\frac{c^s(t,T_1)}{m}}$$

und

$$Z(t,T_i) = \frac{1-\frac{c^s(t,T_i)}{m}\sum_{j=1}^{i-1} Z(t,T_j)}{1+\frac{c^s(t,T_i)}{m}}$$

1.8.8 Definition: Ein **Forward Swap** wird durch die folgenden Angaben spezifiziert

ZP	t	T_0	T_1	...	T_N
X	0	0	$N\cdot\Delta\cdot[z_m(T_0)-c]$	...	$N\cdot\Delta\cdot[z_m(T_{N-1})-c]$

Ein Forward Swap wird also in t vor T_0 vereinbart. Wieder gilt $T_i = T_{i+1} + \Delta, \Delta = \frac{1}{m}$

1.9 Bootstrapping: Zinsstruktur schätzen

Realiter beobachtet man keineswegs NKA-Preise für alle benötigten Restlaufzeiten τ. Für viele Bewertungsaufgaben schätzt man die NKA-

Zinsen (zero yields) auf Basis beobachteten Zinsen und Preisen für Nicht-NKA-Produkte.

1.9.1 Bemerkung: Angenommen zu einem bestimmten Zeitpunkt werden n Kuponanleihen mit Restlaufzeiten $i = 1, ..., n$, Kupons $c^i > 0$, Rücknahmewerten $L^i \geq 0$ und aktuellen Kursen $B^i > 0$ gehandelt. Wir betrachten also die Zeitpunkte in genau einem Jahr, in genau zwei Jahren, usw. Wir betrachten also die Zeitpunkte zu denen die betrachten Wertpapiere Zahlungen verbriefen. Diese Wertpapiere definieren die folgende Auszahlungsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c^1 + L^1 & c^2 & ... & c^{n-1} & c^n \\ 0 & c^2 + L^2 & ... & c^{n-1} & c^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & c^n + L^n \end{pmatrix}.$$

Jede Spalte korrespondiert zu einem Wertpapier und jede Zeile zu einem Zeitpunkt. Da diese Matrix nicht-singulär ist – alle Zahlen auf der Hauptdiagonalen sind strickt positiv –, kann man zu einem vorgegeben Auszahlungsprofil für die betrachteten Zeitpunkte stets ein Portfolio aus den gehandelten Wertpapieren angeben, das dieses Auszahlungsprofil exakt trifft. Mit anderen Worten, jedes Auszahlungsprofil für die Zeitpunkte $t = 1, 2, ..., n$ lässt sich replizieren.

Mit den Angaben kann man zudem die Zinsstruktur wie folgt bestimmen (man nennt solche Verfahren **Bootstrapping**). Man löst zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} L^1 + c^1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ c^2 & L^2 + c^2 & 0 & ... & 0 \\ c^3 & c^3 & L^3 + c^3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n & c^n & ... & & L^n + c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \\ Z^3 \\ \vdots \\ Z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ \vdots \\ B^n \end{pmatrix}$$

also

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Z} = \mathbf{B}.$$

Wenn wir $Z_k = \frac{1}{(1+z_k)^k}$ beachten, so ergibt sich die Zinsstruktur

$$z_{1,k} = \sqrt[k]{1/Z_k} - 1.$$

1.9.2 Bemerkung: Wenden Sie Bootstrapping auf Tabelle 2.2 aus Veronesi an.

1.9.3 Bemerkung: Die in der vorhergehenden Bemerkung vorgegebene Synchronizität gibt es realiter nicht. Dementsprechend gibt es mehr Zahlungszeitpunkte als Anleihen.

Eine bewährte Methode mit dieser asynchronizität umzugehen geht auf Fama und Bliss zurück. Man erhält sogenannte **unsmoothed Fama-Bliss yields**. Wir wenden diese Methode auf Daten aus der Tabelle der Bundesbank an. Unterstellt werden stückweise konstante Forwardraten f_i zwischen den beobachteten Endfälligkeiten $\tau_i, i = 1, ..., N$ (u_k^i bezeichnet alle Zahlungszeitpunkte der Anleihe i mit Endfälligkeit τ_i), wobei wir diese Endfälligkeiten zunächst geordnet haben: $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N$.

Zunächst unterstellen wir eine konstante Forwardrate für die Zeitspanne bis τ_1. Dann gilt

$$B_1 = \sum_{k \,\mathrm{mit}\, u_k^1 \leq \tau_1} e^{-f_1 u_k} c_{1,u_k}$$

Wir erhalten so eine Gleichung für die unbekannte Forwardrate f_1.

Dann unterstellen wir eine konstante Forwardrate für das Zeitinterval

$(\tau_1, \tau_2]$ Es ergibt sich für die Bewertung der zweiten Anleihe

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \sum_{k:u_k^2 \le \tau_1} e^{-f_1 u_k} c_{2,u_k^2} + Z_{\tau_1} \left[\sum_{k:\tau_1 < u_k^2 \le \tau_2} e^{-f_2(u_k^2 - \tau_1)} c_{2,u_k^2} \right] \\
Z_{\tau_1} &= e^{-f_1 \tau_1}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also eine Gleichung mit der wir f_2 bestimmen können.

Dann erhalten wir eine Gleichung für f_3 aus der dritten Anleihe

$$
\begin{aligned}
B_3 &= \sum_{k:u_k^3 \le \tau_1} e^{-f_1 u_k^3} c_{3,u_k^3} + Z_{\tau_1} \left[\sum_{k:\tau_1 < u_k^3 \le \tau_2} e^{-f_2(u_k^3 - \tau_1)} c_{3,u_k^3} \right] \\
&\quad + Z_{\tau_2} \left[\sum_{k:\tau_2 < u_k^3 \le \tau_3} e^{-f_3(u_k^3 - \tau_2)} c_{3,u_k^3} \right], \\
Z_{\tau_2} &= e^{-f_2(\tau_2 - \tau_1)} e^{-f_1 \tau_1}
\end{aligned}
$$

Wenn man diese Schritte so weiter durchläuft, dann erhält man **alle** Diskontfaktoren (also die Zinsstruktur) mit der Formel

$$
\begin{aligned}
Z_\tau &= e^{-(\sum_{k=1}^{i-1} f_k(\tau_k - \tau_{k-1}) + f_i(\tau - \tau_{i-1}))} \\
&= Z_{\tau_{i-1}} \cdot e^{-f_i(\tau - \tau_{i-1})}, \tau_{i-1} < \tau \le \tau_i
\end{aligned}
$$

1.10 Nelson-Siegel Zinsstruktur

1.10.1 Bemerkung: Die Zinsstrukturkurve wird bei dieser Methode mittels der Nelson-Siegel-Ladungen

$$\begin{aligned} L_1(\tau) &= 1 \\ L_2(\tau) &= \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ L_3(\tau) &= \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{aligned}$$

wie folgt dargestellt dargestellt:

$$\widehat{y}(\tau;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\lambda) = \alpha_1 L_1(\tau) + \alpha_2 L_2(\tau) + \alpha_3 L_3(\tau)$$

Die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda$ kann mit der Methode der kleinsten Quadrate schätzen. Dazu bestimmt man aus $\widehat{y}(\tau;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\lambda)$ die Modellpreise für die Kuponanleihen, deren Marktwerte man beobachtet hat. Dann berechnet man die quadrierten Bewertungsfehler. Schließlich sucht man mit einer iterativen Methode die Parameter, so dass die Summe der quadrierten Fehlerquadrate minimal ist.

2 Zinsbaummodelle

Bisher haben wir kein *Modell* für die stochastische Dynamik der Zinssätze behandelt/benötigt. Für die bisher betrachteten Bewertungs- und Replikationsprobleme (Hedging) benötigt man in der Tat kein Modell, das die Verteilung der Zinsen modelliert. Für die Bewertung von beispielsweise Zinsfutures und Zinsoptionen jedoch benötigt man solche Modelle.

Man unterscheidet zeitstetige und zeitdiskrete Modelle. Binomialbaummodelle sind sehr populäre zeitdiskrete Modelle. Wir betrachten (zunächst) ein Einperiodenbinomialbaummodell.

Die Quelle ist **Veronesi** [17, Kapitel 9 und 10].

2.1 Einperiodenzinsbaummodell

EPZBM = Einperiodenzinsbaummodell

2.1.1 Definition (Zinsbaum und EPZBM): Die Zinsentwicklung wird durch die folgende Tabelle charakterisiert:

$$\begin{array}{c|c} r_0 & r_{1,u} \\ \hline & r_{1,d} \end{array}$$

Dabei bezeichnet r_0 den Zins einer Nullkopunanleihe mit einer RLZ von einer Periode. Wir unterstellen, dass der Zins in $t = 1$ nur die Werte

$r_{1,\omega}, \omega \in \{u, d\}$ annehmen kann, wobei $0 < p = \mathbb{P}(r_1 = r_{1,u}) < 1$ bezeichnet. Wir unterstellen o.B.a.A $r_{1,u} > r_{1,d}$.

Für die 1-NKA mit Nennwert 100 gilt gemäß Definition:

$P_0(1)$	$P_{1,u}(1) = 100$
	$P_{1,d}(1) = 100$

wobei

$$P_0(1) = e^{-r_0 \cdot \Delta} \cdot 100.$$

Aus dem postulierten Zinsbaum ergeben sich dann (ohne weitere Argumente) für die 2-NKA mit Nennwert 100:

$P_0(2)$	$P_{1,u}(2)$	$P_{2,uu}(2) = 100$
	$P_{1,d}(2)$	$P_{2,ud}(2) = 100$
		$P_{2,dd}(2) = 100$

wobei

$$P_{1,u}(2) = e^{-r_{1,u} \cdot \Delta} \cdot 100$$
$$P_{1,d}(2) = e^{-r_{1,d} \cdot \Delta} \cdot 100$$

Den Wert $P_0(2)$ der 2-NKA beobachten wir gemäß Annahme am Finanzmarkt.

Wir unterstellen, dass Anleger friktionsfrei und ohne Transaktionskosten 1-NKA und 2-NKA kaufen bzw. leerverkaufen können; entsprechende Positionen bezeichnen wir mit N_1 bzw. N_2.

Wir wollen ein Zinsderivat **bewerten**, d.h. ein Finanzprodukt dessen Wert sich aus dem Zinssatz $r_{1,\omega}$ ergibt. Wir suchen also den **fairen Wert** V_0 der bedingten Auszahlung $V_{1,\omega}$

$$\begin{array}{c|c} V_0 & V_{1,u} = g(r_{1,u}) \\ \hline & V_{1,d} = g(r_{1,d}) \end{array},$$

wobei $g = g(r)$ die Auszahlungsfunktion des Derivates in $t = 1$ gemäß Vertrag bezeichnet.

2.1.2 Satz (Arbitragefreiheit): Das EPZBM ist genau dann arbitragefrei, wenn

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta} P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1.$$

Beweis: Äquivalent zur Arbitragefreiheit ist

$$P_{1,u}(2) < e^{r_0\Delta} P_0(2) < P_{1,d}(2).$$

In der Mitte steht die Auszahlung für den Fall, dass der Geldbetrag $P_0(2)$ auf dem Geldmarktkonto eingezahlt wird. Links bzw. rechts steht die Auszahlung (bei Verkauf in $t = 1$), wenn man die 2-NKA für $P_0(2)$ kauft. Genau dann, wenn die Auszahlung des Geldmarktkontos strikt in der Mitte steht, schwach-dominiert weder der Kauf noch der Leerverkauf der 2-NKA das Geldmarktkonto. Das ist äquivalent zur Arbitragefreiheit.

$$\begin{aligned} & P_{1,u}(2) < e^{r_0\Delta} P_0(2) < P_{1,d}(2) \\ \Leftrightarrow\, & 0 < e^{r_0\Delta} P_0(2) - P_{1,u}(2) < P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2) \\ \Leftrightarrow\, & 0 < \frac{e^{r_0\Delta} P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1 \end{aligned}$$

2.1.3 Satz (Vollständigkeit und Bewertung durch Replikation): i.) Das EPZBBM ist vollständig: Jedes (binäre) Auszahlungsprofil (V_1, V_2) lässt sich replizieren. Für jede rechte Seite (V_1, V_2) gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung (N_1, N_2) des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 100 & P_{1,u} \\ 100 & P_{1,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_u \\ V_d \end{pmatrix}$$

ii.) Für den Fall, dass das EPZBBM arbitragefrei ist, ist der faire Wert des Derivates mit Auszahlungsprofil (V_u, V_d) ist

$$V_0 = P_0(1) \cdot N_1 + P_0(2) \cdot N_2.$$

Beweis: ...

2.1.4 Satz (Risikoneutralbewertung): Wenn Arbitragefreiheit gilt, dann definiert

$$q = \frac{e^{r_0 \Delta} P_0(2) - P_{1,d}(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \in (0, 1)$$

ein Risikoneutralwahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(P_1(2) = P_{1,u}(2)) = q$. Es gilt dann das Risikoneutralbewertungsprinzip, d.h. es gilt

$$V_0 = e^{-r_0 \Delta}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(V_1) = e^{-r_0 \Delta} \left(q V_{1,u} + (1-q) V_{1,d} \right).$$

Beweis: q definiert eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit, wenn mit $q = \mathbb{Q}(P_1(2) = P_{1,u}(2))$ die Risikoneutralbewertungsformel für die 2-NKA gilt:

$$P_0(2) = e^{-r_0 \Delta}(q P_{1,u}(2) + (1-q) P_{1,d}(2))$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$e^{r_0 \Delta} P_0(2) - P_{1,d}(2) = q P_{1,u}(2) - q P_{1,d}(2)$$

Also

$$q = \frac{e^{r_0 \Delta} P_0(2) - P_{1,d}(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \in (0, 1)$$

2.1.5 Bemerkung: Wir beobachten $e^{-r_0 \Delta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(P_1(2)) = P_0(2)$, aber mutmaßlich $e^{-r_0 \Delta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2)) > P_0(2)$. Warum?

2.1.6 Bemerkung: Durch die Angabe des kontemporären Zinses r_0 wird der Preis $P_0(1) = e^{-r_0\Delta}100$ der 1-NKA festgelegt; und umgekehrt:

$P_0(1)$	$P_{1,u}(1) = 100$
	$P_{1,d}(1) = 100$

Die Rendite dieser Anlageform beträgt also r_0. Durch die Angabe der Zinsen $r_{1,u}, r_{1,d}$ werden die Preise $P_{1,u}(2) = e^{-r_{1,u}\Delta} \cdot 100$ und $P_{1,d}(2) = e^{-r_{1,d}\Delta} \cdot 100$ der 2-NKA festgelegt; und umgekehrt:

$P_0(2)$	$P_{1,u}(2)$
	$P_{1,d}(2)$

Der Preis $P_0(2)$ wird auf dem Markt beobachtet.

Eigentlich besteht kein Unterschied zwischen einem EPBBM für Zinsen und für Aktien. Wir spezifizieren zwar den Zins (für jeweils eine Periode), aber aus der Zinsspezifikation ergeben sind unmittelbar Wertpapierpreise. Diese Korrespondenz zwischen dem EBBBM für Zinsen und für Aktien kann man besonders einfach an der Auszahlungsmatrix zusammen mit den Anschaffungspreisen sehen:

$$A^{\text{Aktien}} = \begin{pmatrix} e^{r\Delta} & S_1(\omega_1) \\ e^{r\Delta} & S_1(\omega_2) \end{pmatrix},$$
$$\bar{S}_0 = (1, S_0)^T$$

und

$$A^{\text{Zins}} = \begin{pmatrix} 100 & P_{1,\omega_1}(2) \\ 100 & P_{1,\omega_2}(2) \end{pmatrix}$$
$$\bar{P}_0 = (P_0(1), P_0(2))^T$$

Mathematisch gibt es eigentlich keinen *erheblichen* Unterschied. Die Auszahlungsmatrizen haben jeweils den Rang 2 und die erste Spalte ist konstant (bezüglich ω).

Bei zwei Perioden ist das anders. Wir betrachten aber zunächst noch Aspekte des EPZBM.

2.1.7 Satz (Marktpreis des Risikos): Es gelte

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta}P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1,$$

d.h. mit 1-NKA und 2-NKA kann man keine Arbitrage bilden. Gegeben sei ein Zinsderivat mit Auszahlung (V_u, V_d), dass mit V_0 fair bewertet sei. Dann gilt

$$\frac{e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) - V_0}{V_{1,u} - V_{1,d}} = \frac{e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}.$$

Beweis: Aus der Vollständigkeit und der Bewertung gemäß Replikation

$$\begin{aligned} V_{1,u} &= N_1 100 + N_2 P_{1,u}(2) \\ V_{1,d} &= N_1 100 + N_2 P_{1,d}(2) \\ V_0 &= N_1 e^{-r_0\Delta}100 + N_2 P_0(2) \end{aligned}$$

Mit der ersten beiden Gleichung erhalten wir

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) = 100N_1 + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2))N_2$$

Also

$$N_2 = \frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}$$

Wir lösen $V_0 = N_1 e^{-r_0\Delta}100 + N_2 P_0(2)$ nach $100N_1$ auf und setzen in

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) = 100N_1 + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2))N_2$ ein.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) &= e^{r_0\Delta}(V_0 - N_2P_0(2)) + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2))N_2 \\ e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) &= V_0 - N_2P_0(2) + e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2))N_2 \\ e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) - V_0 &= e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2))N_2 - P_0(2)N_2 \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch $N_2 = \frac{V_{1,u}-V_{1,d}}{P_{1,u}(2)-P_{1,d}(2)}$ um das gewünschte Resultat zu erhalten:

$$\frac{e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) - V_0}{V_{1,u} - V_{1,d}} = \frac{e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}$$

2.1.8 Definition und Bemerkung (Marktpreis des Risikos): Wir definieren den **Marktpreis des Risikos**:

$$\lambda_0 = \frac{e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}.$$

Für den Marktpreis des Risikos haben wir die folgende **Interpretation**:

$$\lambda_0 = \frac{\text{Risikoprämie in GE}}{\text{Risiko in GE}}$$

Die Risikoprämie wir haben dabei in Geldeinheiten wie folgt gemessen:

$$\text{RP} = e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(P_1(2)) - P_0(2)$$

und das **Risiko** wird ebenfalls in Geldeinheiten gemessen:

$$\text{Risiko} = P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)$$

► Typischerweise fällt der Preis, wenn der Zins steigt. Also ist $P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)$ und deshalb auch $\lambda_0 < 0$. Das (vergütete) Risiko $P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)$ ist dann auch negativ.

2.1.9 Satz (Bewertung durch Risikoabschlag mit Marktpreis

des Risikos): Es gelte

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta}P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1,$$

d.h. mit 1-NKA und 2-NKA kann man keine Arbitrage bilden. Gegeben sei ein Zinsderivat mit Auszahlung $(V_{1,u}, V_{1,d})$, dass mit V_0 fair bewertet sei. Dann gilt

$$V_0 = e^{-r_0\Delta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(V_1) - \lambda_0(V_{1,u} - V_{1,d}).$$

Dabei hat der Risikoabschlag die Form **Preis des Risikos** $\times$ **Maß des Risikos**.

Die Gleichung gilt natürlich auch die die 2-NKA. Da beobachten wir, dass die Vorzeichen von λ_0 und $P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)$ zusammen passen. Dann ziehen wir in der Tat eine positive Zahl $\lambda_0(P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2))$ ab.

2.1.10 Satz (Bewertung auf Basis des stochastischen Diskontfaktors): Es gelte

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta}P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1,$$

d.h. mit 1-NKA und 2-NKA kann man keine Arbitrage bilden. Gegeben sei ein Zinsderivat mit Auszahlung $(V_{1,u}, V_{1,d})$, dass mit V_0 fair bewertet sei. Dann gilt

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(mV_1) \\ &= (p \cdot m_u \cdot V_{1,u} + (1-p) \cdot m_d \cdot V_{1,d}) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} m_u &= e^{-r_0\Delta} \cdot \frac{q}{p} \\ m_d &= e^{-r_0\Delta} \cdot \frac{1-q}{1-p} \end{aligned}$$

2.1.11 Bemerkung: Wir haben vier Bewertungsmethoden kennen gelernt:

- Bewertung durch Replikation.
- Bewertung durch Risikoabschlag mit Marktpreis des Risikos.
- Risikoneutralbewertung (oder Martingalbewertung).
- Bewertung mit stochastischem Diskontfaktor.

2.2 Zweiperiodenzinsbaummodell

ZPZBM = Zweiperiodenzinsbaummodell

2.2.1 Bemerkung: Wir betrachten jetzt ein ZPZBM:

r_0	$r_{1,u}$	$r_{2,uu}$
	$r_{1,d}$	$r_{2,ud}$
		$r_{2,dd}$

wobei $r_{2,ud} = r_{2,du}$.

2.2.2 Bemerkung: Wir unterstellen jetzt, dass Investoren in $t = 0$ in 1-NKA, in 2-NKA **sowie in** 3-NKA investieren können. Für den Preis der 3-NKA betrachten wir die folgende Tabelle:

$P_0(3)$	$P_{1,u}(3)$	$P_{2,uu}(3)$	$P_{3,uuu}(3) = 100$
	$P_{1,d}(3)$	$P_{2,du}(3)$	$P_{3,duu}(3) = 100$
		$P_{2,dd}(3)$	$P_{3,ddu}(3) = 100$
			$P_{3,ddd}(3) = 100$

Bei der Angabe dieser Tabelle muss man beachten, dass sie sich auf den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum bezieht wie die Zinstabelle. Die

Zellen *gehören* zu den gleichen ω wie die Zellen für r. Das bedeutet insbesondere, dass

$$P_1(3) = P_{1,\omega_1}(3) \Leftrightarrow r_1 = r_{1,\omega_1}$$
$$P_1(3) = P_{1,\omega_2}(3) \Leftrightarrow r_1 = r_{1,\omega_2}$$

Das bedeutet, dass sich die 3-NKA wie ein Zinsderivat verhält; also wie ein Finanzprodukt, dessen Wert sich in $t = 1$ unmittelbar und direkt aus/mit dem Zinsniveau ergibt. *Das ist eine problematische Annahme.*

Aus dem ZPZBM ergeben sich dabei die Preise $P_{2,\omega_1\omega_2}(3) = e^{-r_{t,\omega_1\omega_2}\Delta}100$ unmittelbar aus den jeweiligen Werten der Zinsen $r_{t,\omega_1\omega_2}$. Bezogen auf die Preise $P_{1,u}(3)$ und $P_{1,d}(3)$ verbleibt **ein Freiheitsgrad**.[1]

Wenn der Preis $P_{1,u}(3)$ gegeben wäre, dann könnten wir ein $q_{2,u}$ für den Teilbaum bestimmen, der mit $P_{1,u}(3)$ beginnt (grün in der Tabelle). Analog, wenn der Preise $P_{1,d}(3)$ gegeben wäre, dann könnten wir ein (gegebenenfalls anderes) $q_{2,d}$ für den Teilbaum bestimmen, der mit $P_{1,d}(3)$ beginnt (blau). Es ist aber überhaupt nicht klar, woher wir die Preise $P_{1,u}(3)$, $P_{1,d}(3)$ *bekommen* sollen.

Wir wissen schon, dass man (und wie man) auf Basis des EPZBM die Risikoneutralwahrscheinlichkeit q_1 bestimmen kann. Wenn wir die *heroische* Annahme treffen, dass die Risikowahrscheinlichkeit q_1 auch für die genannten Teilbäume mit grünem bzw. blauem Anfangspreis *richtig* ist, dann können wir die Preise $P_{1,u}(3)$, $P_{1,d}(3)$ gemäß Risikoneutralbewertung bestimmen. Dann können wir weiter (ebenfalls mit q_1) den Modellpreis $P_0(3)$ bestimmen. Es ist aber ziemlich unwahrscheinlich, dass der so ermittelte Preis dem Marktpreis entspricht.

Kalibrieren! Man verwendet für die zweite Periode eine Risikoneutralwahrscheinlichkeit q_2. Wir unterstellen dabei, dass die Wahrscheinlichkeit $q_2 = q_{2,uu}$ für den Baum der grün beginnt gleich der Wahrscheinlichkeit $q_2 = q_{2,du}$ für den Baum der blau beginnt.[2] Wir bestimmen q_2,

[1] Wir können aber nicht etwa beide Werte frei wählen wählen. Nur <u>ein</u> FG!

[2] Wir haben nur einen FG!

so dass sich bei der Risikoneutralbewertung der beobachtete Marktpreis ergibt. Auf diese Weise kann man den Baum exakt an die kontemporäre Zinsstruktur **kalibrieren**.

2.2.3 Bemerkung: Arbitragefreiheit charakterisieren! Wir betrachten $t = 0$. Es gibt drei Anlageformen: (i) 1-NKA (den Geldmarkt), (ii) 2-NKA und (iii) 3-NKA. Wir unterstellen

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta} P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1.$$

Diese Bedingung stellt sicher, dass man mit 1-NKA und 2-NKA keine Arbrtragemöglichkeit erstellen kann.

2.2.4 Satz: Wir betrachten den Finanzmarkt mit drei Anlageformen: 1-NKA, 2-NKA und 3-NKA und dem Anlagehorizont bis $t = 1$.

Es gelte

$$0 < \frac{e^{r_0\Delta} P_0(2) - P_{1,u}(2)}{P_{1,d}(2) - P_{1,u}(2)} < 1.$$

Diese Bedingung stellt sicher, dass man mit 1-NKA und 2-NKA keine Arbrtragemöglichkeit erstellen kann.

Arbeitragefeiheit (für den Markt mit drei Anlageformen) gilt genau dann, wenn

$$\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)} = \frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} =: \lambda_1$$

gilt. Beachte

$$e^{-r_0\Delta} = \frac{P_0(1)}{100}.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst, dass aus der Arbitragefreiheit die Gleichung

$$\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)} = \frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}$$

folgt. Wir *fassen* die 3-NKA als Zins*derivat* mit Auszahlungen $(V_{1,u}, V_{1,d}) = (P_{1,u}(3), P_{1,d}(3))$ auf und betrachten die gemäß Voraussetzung eindeutig lösbare **Replikationsgleichungen**:

$$\begin{pmatrix} 100 & P_{1,u}(2) \\ 100 & P_{1,d}(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,u}(3) \\ P_{1,d}(3) \end{pmatrix}.$$

Arbitragefreiheit für den Markt mit drei Anlageformen gilt genau dann, wenn

$$P_0(3) = P_0(1) \cdot N_1 + P_0(2) \cdot N_2$$

gilt. [Andernfalls gäbe es eine offensichtlich Arbitragemöglichkeit. Welche?]

Wir erhalten aus dieser Bewertungsgleichungen für den späteren Gebrauch

$$\frac{P_0(3) - P_0(2) \cdot N_2}{P_0(1)} = N_1.$$

Aus der Replikationsgleichung folgt zeilenweise

$$\begin{aligned} 100N_1 + P_{1,u}(2)N_2 &= P_{1,u}(3) \\ 100N_1 + P_{1,d}(2)N_2 &= P_{1,d}(3) \end{aligned}$$

Daraus folgt einerseits eine **Delta-Gleichung**

$$N_2 = \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}$$

und andererseits zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{P_{1,u}(3)}{100} - \frac{P_{1,u}(2)}{100} N_2 \\
N_1 &= \frac{P_{1,d}(3)}{100} - \frac{P_{1,d}(2)}{100} N_2.
\end{aligned}
$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$
100N_1 = \mathbb{E}(P_1(3)) - \mathbb{E}(P_1(2))N_2 \qquad (*)
$$

Dann folgt aus der obigen Gleichung für N_1:

$$
\begin{aligned}
\frac{P_0(3) - P_0(2) \cdot N_2}{\frac{P_0(1)}{100}} &= \mathbb{E}(P_1(3)) - \mathbb{E}(P_1(2))N_2 \\
\Rightarrow P_0(3) - P_0(2) \cdot N_2 &= \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2))N_2
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2))N_2 - P_0(2) \cdot N_2 = \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3). \\
&\Rightarrow \left(\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)\right) \cdot N_2 = \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3) \\
&\Rightarrow \left(\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)\right) \cdot \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \\
&\quad = \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten schließlich wie gewünscht:

$$
\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} = \frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}
$$

Für die Rückrichtung nehmen wir jetzt an, dass

$$
\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)} = \frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}
$$

gilt. Wir müssen nachweisen, dass die 3-NKA fair bewertet wird:

$$P_0(3) = P_0(1) \cdot N_1 + P_0(2) \cdot N_2,$$

wobei wieder

$$\begin{pmatrix} 100 & P_{1,u}(2) \\ 100 & P_{1,d}(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,u}(3) \\ P_{1,d}(3) \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)} = \frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - P_0(2)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3) &= \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) \\ &\quad - \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} P_0(2) \\ &= \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) - N_2 P_0(2) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} P_0(3) &= \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)} \frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(2)) + N_2 P_0(2) \\ &= \frac{P_0(1)}{100}\left(\mathbb{E}(P_1(3)) - \frac{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)}{P_{1,u}(2) - P_{1,d}(2)}\mathbb{E}(P_1(2))\right) + N_2 P_0(2) \\ &= \frac{P_0(1)}{100}\left(\mathbb{E}(P_1(3)) - N_2\mathbb{E}(P_1(2))\right) + N_2 P_0(2) \quad \text{[Delta Gleichung]} \\ &= \frac{P_0(1)}{100} \cdot 100 \cdot N_1 + N_2 P_0(2) \qquad \text{[Gleichung}(*)\text{]} \\ &= P_0(1) N_1 + N_2 P_0(2) \end{aligned}$$

Also wie gewünscht

$$P_0(3) = P_0(1) N_1 + N_2 P_0(2)$$

2.2.5 Bemerkung: Auf Basis der Spezifikation der Zinsentwicklung – und damit der 1-NKA und 2-NKA Preise – können wir die 3-NKA *noch nicht* fair bewerten. Wir müssen *annehmen*, dass sich die 3-NKA wie ein (Kurzfrist-)Zinsderivat *verhält*. Wenn wir das unterstellen, dann erhalten wir eine bemerkenswerte *Synchronizität*: Für alle Zinsderivate gilt

$$\frac{\frac{P_0(1)}{100}\mathbb{E}(P_1(3)) - P_0(3)}{P_{1,u}(3) - P_{1,d}(3)} = \lambda_1.$$

Es gibt gemäß Annahme nur ein (bivariates) Zinsrisiko und dann gibt es auch nur einen gemeinsamen Preis des Risikos λ_1.

Literaturverzeichnis

[1] **Bingham, Nicholas, Rüdiger Kiesel**, 2004, Risk-Neutral Valuation, 2. Auflage, Springer

[2] Tomas **Björk**, 2020, Arbitrage Theory in Continuous Time, 4. Auflage, Oxford University Press

[3] **Cairns, Andrew**, 2004, Interest Rate Models, Princeton University Press

[4] **Campolieti, Guiseppe und Roman Makarov**, 2014, Financial Mathematics, CRC Press - Taylor & Francis Group

[5] Darrell **Duffie**, 2001, Dynamic Asset Pricing, Princeton University Press.

[6] **Föllmer, Hans und Alexander Schied**, 2016, Stochastic Finance – An introduction in discrete time, 4. Auflage, Gruyter

[7] John **Hull**, 2019, Optionen, Futures und andere Derivate, Pearson Deutschland GmbH.

[8] Stephan Ramon **Garcia** Roger A. und **Horn**, 2023, Matrix Mathematics, Cambridge University Press.

[9] Ioannis E. **Karatzas** und Steven **Shreve** (1998) Brownian Motion and Stochastic Calculus; Springer Verlag

[10] Carl D. **Meyer**, 2000, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra,

Society for Industrial and Applied Mathematics.

[11] **Meckes, Elizabeth**, 2018, Linear Algebra, Cambridge University Press

[12] **Munk, Claus**, 2011, Fixed Income Modelling, Oxford University Press

[13] **Musiela, Marek; Marek Rutkowski**, 2005, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer

[14] **Shreve, Steven**, 2004, Stochastic Calculus for Finance 2, Springer

[15] **Strang, Gilbert**, 2023, Introduction to Linear Algebra, 6th ed., Wellesley - Cambridge Press

[16] **Strang, Gilbert**, 2018, Linear Algebraand Learning from Data, Wellesley - Cambridge Press

[17] **Veronesi, Pietro**, 2010, Fixed Income Securities, Wiley

[18] **Williams, Ruth**, 2006, Introduction to the Mathematics of Finance, American Mathematical Society